

高雄市明誠中學 高一數學平時測驗					日期：102.03.25	
範圍	2-1.邏輯、集合	班級	一年____班	姓名		
		座號				

一、填充題 (每題 10 分)

1. 「王同學至少是 17 歲」的否定敘述為_____。

解答 王同學至多是 16 歲

解析 王同學至少是 17 歲 \Leftrightarrow 王同學的年齡 ≥ 17 ,

否定：王同學的年齡 $< 17 \Leftrightarrow$ 王同學的年齡 $\leq 16 \Leftrightarrow$ 王同學至多是 16 歲。

2. 「電梯在每一層樓都至少有三人走出來」的否定敘述為_____。

解答 電梯在有的層樓至多有二人走出來

解析 (1) 利用 $\sim(\forall p) \equiv \exists(\sim p)$ 。

(2) 至少有三人走出來，即走出來的人數 ≥ 3 ,

其否定為「走出來的人數 < 3 」，即「走出來的人數 ≤ 2 」，即至多有二人走出來。

3. 設 $U = \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \leq 10\}$ 為宇集， A 與 B 均為 U 之子集，已知 $A \cap B = \{3, 4\}$, $A \cap B' = \{7, 9, 10\}$, $A' \cap B' = \{2, 8\}$ ，則 $B =$ _____。

解答 $\{1, 3, 4, 5, 6\}$

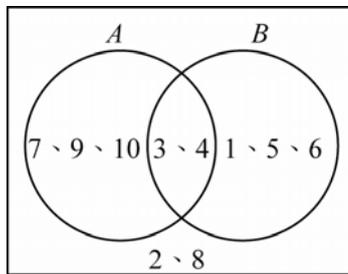
解析 $U = \{1, 2, \dots, 9, 10\}$,

$A \cap B = \{3, 4\} \Rightarrow \{3, 4\} \subset A, \{3, 4\} \subset B$,

$A \cap B' = \{7, 9, 10\} \Rightarrow \{7, 9, 10\} \subset A, \{7, 9, 10\} \subset B'$,

$A' \cap B' = \{2, 8\} \Rightarrow \{2, 8\} \subset A', \{2, 8\} \subset B'$,

$\therefore B \cap A' = \{1, 5, 6\}, \therefore A = \{3, 4, 7, 9, 10\}, B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ 。



4. 集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ ，則

(1) 集合 $(A - B) \cup (B - A) =$ _____。(2) B 的子集有_____個。

解答 (1) $\{1, 4, 5\}$ (2) 16

解析 (1) $A - B = A - (A \cap B) = \{1, 2, 3\} - \{2, 3\} = \{1\}$,

$B - A = B - (A \cap B) = \{2, 3, 4, 5\} - \{2, 3\} = \{4, 5\}$ ，故 $(A - B) \cup (B - A) = \{1, 4, 5\}$ 。

(2) $2^4 = 16$

5. 設 $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 - x + k = 0\}$, $B = \{2, 3\}$ ，若 $B - A = \{3\}$ ，則 $k =$ _____。

解答 -2

解析 由 $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 - x + k = 0\}$, $B = \{2, 3\}$, $B - A = \{3\}$,

知 $2 \in A$, $2^2 - 2 + k = 0$, $\therefore k = -2$ 。

6. 設 $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 2 < x < 5\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, 2 \leq |2x + 1| \leq 7\}$ ，則：

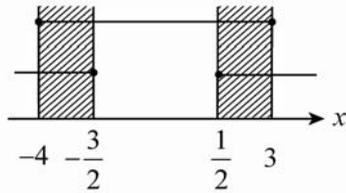
(1) $B =$ _____。(2) $B - A =$ _____。

解答 (1) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, -4 \leq x \leq -\frac{3}{2} \text{ 或 } \frac{1}{2} \leq x \leq 3\}$; (2) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, -4 \leq x \leq -\frac{3}{2} \text{ 或 } \frac{1}{2} \leq x \leq 2\}$

解析 (1) ① $|2x+1| \geq 2 \Rightarrow 2x+1 \geq 2 \text{ 或 } 2x+1 \leq -2 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \text{ 或 } x \leq -\frac{3}{2}$.

② $|2x+1| \leq 7 \Rightarrow -7 \leq 2x+1 \leq 7 \Rightarrow -4 \leq x \leq 3$,

由①∩②知 $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -4 \leq x \leq -\frac{3}{2} \text{ 或 } \frac{1}{2} \leq x \leq 3\}$.



(2) $B - A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -4 \leq x \leq -\frac{3}{2} \text{ 或 } \frac{1}{2} \leq x \leq 2\}$.

6. 設 $A = \{(x, y) \mid 2x + y = 1\}$, $B = \{(y+1, x-2) \mid ax + by = 1\}$, 若 $A = B$, 則 $(a, b) =$ _____.

解答 (1, 2)

解析 $\begin{cases} y+1 = \alpha \\ x-2 = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \alpha - 1 \\ x = \beta + 2 \end{cases} \Rightarrow a(\beta + 2) + b(\alpha - 1) = 1$

$\Rightarrow b\alpha + a\beta = 1 - 2a + b \Leftrightarrow 2x + y = 1$

$\Rightarrow \frac{b}{2} = \frac{a}{1} = \frac{1-2a+b}{1} \Rightarrow 2a = b, 1-2a+b = a,$

$\therefore a = 1, b = 2 \Rightarrow (a, b) = (1, 2)$.

7. 設 $A = \{x \mid x > 3 \text{ 或 } x < -1, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{x \mid |2x+a| \leq b, x \in \mathbb{R}\}$, 已知 $A \cup B = \mathbb{R}$,

$A \cap B = \{x \mid 3 < x \leq 5, x \in \mathbb{R}\}$, 則數對 $(a, b) =$ _____.

解答 (-4, 6)

解析 由 $A \cup B = \mathbb{R}$ 且 $A \cap B = \{x \mid 3 < x \leq 5\}$, 可知 $B = \{x \mid -1 \leq x \leq 5\}$,

而 $-1 \leq x \leq 5 \Rightarrow -3 \leq (x-2) \leq 3 \Rightarrow |x-2| \leq 3 \Rightarrow |2x-4| \leq 6$ 與 $|2x+a| \leq b$ 同義,

故 $a = -4, b = 6$, 即數對 $(a, b) = (-4, 6)$.

8. 設 $A = \{x \mid \sqrt{x} \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{N} \text{ 且 } x \leq 10^4\}$, $B = \{x \mid x = 20k, k \in \mathbb{N}\}$, 則 $n(A - B)$ 值為 _____.

解答 90

解析 $A = \{x \mid \sqrt{x} \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{N} \text{ 且 } x \leq 10^4\} = \{1^2, 2^2, 3^2, \dots, (10^2)^2\} \Rightarrow n(A) = 100,$

$A \cap B = \{2^2 \cdot 5^2 \cdot 1^2, 2^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2, 2^2 \cdot 5^2 \cdot 3^2, \dots, 2^2 \cdot 5^2 \cdot 10^2\} \Rightarrow n(A \cap B) = 10,$

$\therefore n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 100 - 10 = 90$.

9. 設 a 為一整數, 二集合 $A = \{2, 3, a^2 - 5a + 10\}$, $B = \{2a - 2, -5a + 13, -a + 6\}$,

$A \cap B = \{3, 4\}$, 則 a 之值 = _____.

解答 3

解析 $A \cap B = \{3, 4\} \Rightarrow a^2 - 5a + 10 = 4 \Rightarrow a^2 - 5a + 6 = 0 \Rightarrow a = 2 \text{ 或 } 3,$

$$\textcircled{1} a=2 \Rightarrow \begin{cases} A=\{2, 3, 4\} \\ B=\{2, 3, 4\} \end{cases} \Rightarrow A \cap B \neq \{3, 4\}, \text{ 故 } a=2 \text{ 不合.}$$

$$\textcircled{2} a=3 \Rightarrow \begin{cases} A=\{2, 3, 4\} \\ B=\{4, -2, 3\} \end{cases} \Rightarrow A \cap B = \{3, 4\}, \text{ 合理. 故 } a=3.$$

10. 設 k 為一正實數，集合 $A = \{x \mid |x-1| \leq 4, x \in \mathbb{R}\}$ ， $B = \{x \mid |x-2| \leq k, x \in \mathbb{R}\}$ ，求：

(1) 若 $A \subset B$ ，則 k 之最小值 = _____ . (2) 若 $B \subset A$ ，則 k 之最大值 = _____ .

解答 (1)5;(2)3

解析 集合 $A: |x-1| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq x-1 \leq 4 \Rightarrow -3 \leq x \leq 5$,

集合 $B: |x-2| \leq k, k > 0 \Rightarrow -k \leq x-2 \leq k \Rightarrow 2-k \leq x \leq 2+k$,

(1) 欲 $A \subset B$ ，則須 $2-k \leq -3$ 且 $2+k \geq 5 \Rightarrow k \geq 5$ 且 $k \geq 3 \Rightarrow k \geq 5, \therefore k$ 之最小值為 5 .

(2) 欲 $B \subset A$ ，則須 $2-k \geq -3$ 且 $2+k \leq 5$

$\Rightarrow k \leq 5$ 且 $k \leq 3 \Rightarrow k \leq 3, \therefore k$ 之最大值為 3 .

11. 若 $A = \{x \mid x = 3k + 1, k \in \mathbb{Z}, 1 \leq x \leq 200\}$ ， $B = \{x \mid x = 5n + 2, n \in \mathbb{Z}, 1 \leq x \leq 200\}$ ，則：

(1) $n(A) =$ _____ . (2) $n(A \cap B) =$ _____ .

解答 (1)67;(2)13

解析 $\because 1 \leq x \leq 200, x = 3k + 1, k = 0, 1, 2, \dots, 66, \therefore n(A) = 67$,

$\because 1 \leq x \leq 200, x = 5n + 2, n = 0, 1, 2, \dots, 39, \therefore n(B) = 40$,

當 $x \in A \cap B$ 時， $x = 5n + 2 = 3k + 1 \Rightarrow x = 15r + 7, r \in \mathbb{Z}$,

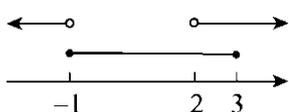
($\because A, B$ 第一個共同項為 7， A 公差為 3， B 公差為 5；共同項公差 15)

$\Rightarrow r = 0, 1, 2, \dots, 12 \Rightarrow n(A \cap B) = 13$.

12. 若 $A = \{x \mid x^2 - x - 2 > 0\}$ ， $B = \{x \mid x^2 + ax + b \leq 0\}$ ， $A \cup B = \mathbb{R}$ ， $A \cap B = \{x \mid 2 < x \leq 3\}$ ，則數對 $(a, b) =$ _____ .

解答 $(-2, -3)$

解析 $x \in A \Rightarrow x^2 - x - 2 > 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) > 0 \Rightarrow x > 2$ 或 $x < -1$,



$\because A \cup B = \mathbb{R}, A \cap B = (2, 3] \Rightarrow B = [-1, 3]$

$\Rightarrow (x-3)(x+1) \leq 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 \leq 0 \Rightarrow a = -2, b = -3$.

13. 設 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 540 \text{ 且 } x \text{ 與 } 360 \text{ 互質}\}$ ， $n(A) =$ _____ .

解答 144

解析 $\because 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5, 1 \leq x \leq 540 \text{ 且 } (x, 360) = 1$ ，互質即表最大公因數 1

故需在 1 到 540 的正整數中去掉 2 或 3 或 5 的倍數

$\Rightarrow n(A) = 540 - (270 + 180 + 108 - 90 - 54 - 36 + 18) = 144$.

14. 某次數學競試有 100 個學生參加，試題僅 A, B, C 三題，測驗結果如下：答對 A 者有 51 人，答對 B 者有 36 人，只答對 C 者有 16 人，答對 B, C 兩題者有 13 人，答對 A 或 C 者有 75 人，答對 B 或 C 者有 59 人，而只答對 A, B, C 三題之一者有 66 人，則：

(1) 只答對 A 者有 _____ 人 .

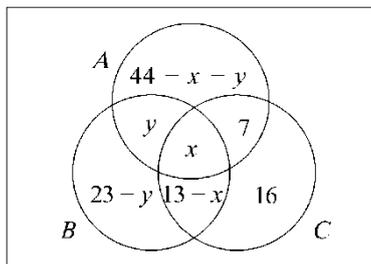
(2) 三題都答錯者有 _____ 人 .

解答 (1)33;(2)8

解析 $\begin{cases} 51+16+(13-x)=75 \\ (44-x-y)+(23-y)+16=66 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=6 \end{cases}$

(1) $44 - 5 - 6 = 33$ (人) .

(2) $n(A \cup B \cup C) = 92, \therefore 100 - 92 = 8$ (人) .



15.若 $S = \{(x, x+5) | x \in \mathbb{R}\}, T = \{(y-1, x+1) | 3x+2y=10, x, y \in \mathbb{R}\}$, 則 $S \cap T =$ _____ .

解答 $\{(-\frac{4}{5}, \frac{21}{5})\}$

解析 令 $(a, b) \in S \cap T$,

$\because (a, b) \in S \Rightarrow a = x, b = x+5 \Rightarrow a - b + 5 = 0 \dots \dots \textcircled{1}$,

$\because (a, b) \in T \Rightarrow a = y-1, b = x+1 \Rightarrow y = a+1, x = b-1$,

又 $3x+2y=10 \Rightarrow 3(b-1)+2(a+1)=10 \Rightarrow 2a+3b-11=0 \dots \dots \textcircled{2}$,

解 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ 得 $a = -\frac{4}{5}, b = \frac{21}{5}$.

16.設 $A = \{x \in \mathbb{R} | |x-1| \leq 2\}, B = \{x \in \mathbb{R} | |x+1| \leq k\}$, 若 $A \subset B$, 則 k 的最小值 = _____ .

解答 4

解析 $x \in A \Rightarrow |x-1| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x-1 \leq 2 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3$,

$x \in B \Rightarrow |x+1| \leq k \Rightarrow -k \leq x+1 \leq k \Rightarrow -k-1 \leq x \leq k-1$,

$\because A \subset B \Rightarrow k-1 \geq 3$ 且 $-k-1 \leq -1 \Rightarrow k \geq 4$ 且 $k \geq 0 \Rightarrow k \geq 4$,

故 k 的最小值 = 4 .

17.若 $A = \{x, y, z\}, B = \{x+1, 2, 3\}$, 且 $A = B$, 則 (x, y, z) 之解共有 _____ 組 .

解答 5

解析 $\because A = B$ 且 $x \neq x+1 \Rightarrow x = 2$ 或 $x = 3$,

$\textcircled{1}$ 若 $x = 2$ 時, $A = \{2, y, z\}, B = \{3, 2, 3\} = \{2, 3\}$,

$\therefore \begin{cases} y=2 \\ z=3 \end{cases}, \begin{cases} y=3 \\ z=2 \end{cases}, \begin{cases} y=3 \\ z=3 \end{cases}$, 有 3 組解 .

$\textcircled{2}$ 若 $x = 3$ 時, $A = \{3, y, z\}, B = \{4, 2, 3\}$,

$\therefore \begin{cases} y=2 \\ z=4 \end{cases}, \begin{cases} y=4 \\ z=2 \end{cases}$, 有 2 組解 .

由 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 知, 共有 5 組解 .

18. $A = \{x | \sqrt{x} \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq 10^6\}, B = \{x | x = 700k, k \in \mathbb{Z}\}$, 求 $n(A - B) =$ _____ .

解答 986

解析 $A = \{1^2, 2^2, 3^2, \dots, (10^3)^2\}, n(A) = 1000$,

$A \cap B = \{x | x = 7 \times 2^2 \times 5^2 \times k, k = 7 \times 1^2, 7 \times 2^2, \dots, 7 \times 14^2\}, n(A \cap B) = 14$,

$\therefore n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 1000 - 14 = 986$.

19.某公司生產多種款式的「阿民」公仔，各種款式只是球帽、球衣或球鞋顏色不同．其中球帽共有黑、灰、紅、藍四種顏色，球衣有白、綠、藍三種顏色，而球鞋有黑、白、灰三種顏色．公司決定紅色的球帽不搭配灰色的鞋子，而白色的球衣則必須搭配藍色的帽子，至於其他顏色間的搭配就沒有限制．在這些配色的要求之下，最多可有_____種不同款式的「阿民」公仔．

解答 25

解析 若球衣為白色時，最多有 $1 \times 3 = 3$ 種方法，

若球衣為綠色時，最多有 $4 \times 3 - 1 = 11$ 種方法（扣除紅色球帽配灰色球鞋），

若球衣為藍色時，最多有 $4 \times 3 - 1 = 11$ 種方法（扣除紅色球帽配灰色球鞋），

故共有 $3 + 11 + 11 = 25$ 種方法．