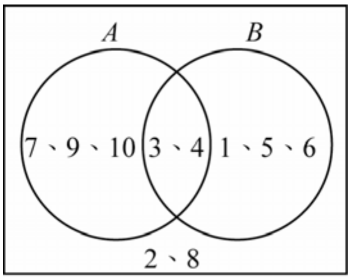
高雄市明誠中學 高一數學平時測驗					日期：102.04.08
範圍	2-1 集合.計數原理(B)	班級	一年____班	姓名	
		座號			

一、填充題 （每題 10 分 ）

1.設 $U=\{n\mid n\in\mathbb{N}，n\le 10\}$為宇集，$A$ 與 B 均為 U 之子集，已知 $A\cap B=\{3，4\}$，$A\cap B'=\{7，9，10\}$，$A'\cap B'=\{2，8\}$，則 $B=$____________ .



解答 $\{1，3，4，5，6\}$

解析 $U=\{1，2，\cdots，9，10\}$，

$A\cap B=\{3，4\}\ \Rightarrow\ \{3，4\}\subset A，\{3，4\}\subset B$，

$A\cap B'=\{7，9，10\}\ \Rightarrow\ \{7，9，10\}\subset A，\{7，9，10\}\subset B'$，

$A'\cap B'=\{2，8\}\ \Rightarrow\ \{2，8\}\subset A'，\{2，8\}\subset B'$，

$\therefore\ B\cap A'=\{1，5，6\}$，$\therefore\ A=\{3，4，7，9，10\}$，$B=\{1，3，4，5，6\}$.

2.設 $A=\{1，3\}$，$B=\{x|x^2-3x+a=0\}$，若 $A-B=\{1\}$，則 a 的值為____________ .

解答 0

解析 $\because\ A-B=A-(A\cap B)=\{1\}$，$\therefore\ A\cap B=\{3\}$，

$x=3$ 代入 $x^2-3x+a=0\ \Rightarrow\ 9-9+a=0\ \Rightarrow\ a=0$.

3.集合 $A=\{1，2，3\}$，$B=\{2，3，4，5\}$，則集合$(A-B)\cup(B-A)=$____________ .

解答 $\{1，4，5\}$

解析 $A-B=A-(A\cap B)=\{1，2，3\}-\{2，3\}=\{1\}$，

$B-A=B-(A\cap B)=\{2，3，4，5\}-\{2，3\}=\{4，5\}$，

故$(A-B)\cup(B-A)=\{1，4，5\}$.

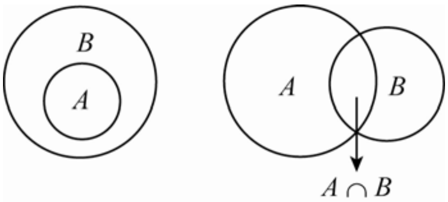
4.若高一同學共 1000 人，其中喜愛數學的有 500 人，喜愛音樂的有 700 人，則兩者都喜愛的最多有(1)____________人，最少有(2)____________人 .

解答 (1)500;(2)200

解析 設集合 A 為喜愛數學的人，集合 B 為喜愛音樂的人，則 $n(A)=500$，$n(B)=700$，

(1)當 $A\subset B$ 時，$n(A\cap B)=500$ 為最多 .

(2)當 $n(A\cup B)=1000$ 時，$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=500+700-1000=200$ 最少 .



5.滿足$\{1，2\}\subset A\subset\{1，2，3，4\}$的集合 A 共有____________個 .

解答 4

解析 (1)集合 A 必須有 1，2 兩個元素才使$\{1，2\}\subset A$.

(2)為使 $A\subset\{1，2，3，4\}$，則 A 可在 3 與 4 兩元素中選取，

3	要	要	不要	不要
4	要	不要	要	不要

$\therefore$ A 有 4 個可能 .

6.設二集合 $A=\{0,2,a^2-a-3\}$，$B=\{-1,a+1\}$，若 $B\subset A$，求 a 之值= ＿＿＿＿＿＿ .

解答　-1

解析　$\because\ \ \{-1,a+1\}=B\subset A=\{0,2,a^2-a-3\}$，

$\therefore\ \ -1=a^2-a-3\ \ \Rightarrow\ \ (a-2)(a+1)=0\ \ \Rightarrow\ \ a=2$ 或 -1

① $a=2$ 時，$a+1=3\notin\{0,2,-1\}$（不合）.

② $a=-1$ 時，$a+1=0\in\{0,2,-1\}$，

$\therefore\ \ a=-1$.

7.設 $A=\{x\mid x\in\mathbb{R},\ 2<x<5\}$，$B=\{x\mid x\in\mathbb{R},\ 2\le|2x+1|\le 7\}$，則：

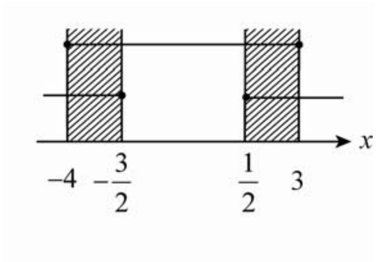
(1) $B=$ ＿＿＿＿＿＿ .　(2) $B-A=$ ＿＿＿＿＿＿ .

解答　(1)$\{x\mid x\in\mathbb{R},\ -4\le x\le-\frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{2}\le x\le 3\}$;(2)$\{x\mid x\in\mathbb{R},\ -4\le x\le-\frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{2}\le x\le 2\}$

解析　(1)① $|2x+1|\ge 2\ \ \Rightarrow\ \ 2x+1\ge 2$ 或 $2x+1\le -2\ \ \Rightarrow\ \ x\ge\frac{1}{2}$ 或 $x\le-\frac{3}{2}$.

② $|2x+1|\le 7\ \ \Rightarrow\ \ -7\le 2x+1\le 7\ \ \Rightarrow\ \ -4\le x\le 3$，

由①∩②知 $B=\{x\mid x\in\mathbb{R},\ -4\le x\le-\frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{2}\le x\le 3\}$.



(2) $B-A=\{x\mid x\in\mathbb{R},\ -4\le x\le-\frac{3}{2}$ 或 $\frac{1}{2}\le x\le 2\}$.

8.設 $A=\{(x,y)\mid 2x+y=1\}$，$B=\{(y+1,x-2)\mid ax+by=1\}$，若 $A=B$，則$(a,b)=$ ＿＿＿＿＿＿ .

解答　$(1,2)$

解析　$(\alpha,\beta)\in A\Rightarrow\ \ 2\alpha+\beta=1$

若 $A=B$，則設 $\begin{cases}y+1=\alpha\\x-2=\beta\end{cases}\ \ \Rightarrow\ \ \begin{cases}y=\alpha-1\\x=\beta+2\end{cases}$

$\Rightarrow\ \ a(\beta+2)+b(\alpha-1)=1\ \ \Rightarrow\ \ b\alpha+a\beta=1-2a+b\ \ \Leftrightarrow\ \ 2\alpha+\beta=1$

$\Rightarrow\ \ \frac{b}{2}=\frac{a}{1}=\frac{1-2a+b}{1}\ \ \Rightarrow\ \ 2a=b,\ 1-2a+b=a$，

$\therefore\ \ a=1,\ b=2\ \ \Rightarrow\ \ (a,b)=(1,2)$.

9.某次學科競試，高一甲班 45 人當中，數學、英文、國文及格者分別是 28 人、29 人、30 人，而英數、國數、國英兩科都及格者分別是 23 人、22 人、24 人，國、英、數三科都及格者共有 20 人，那麼三科都不及格的人數共有＿＿＿＿＿＿人 .

解答　7

解析　設 A，B，C 分別表示數、英、國及格之事件，則 $n(A)=28$，$n(B)=29$，$n(C)=30$，

$n(A\cap B)=23$，$n(B\cap C)=24$，$n(C\cap A)=22$，$n(A\cap B\cap C)=20$，

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

$=28+29+30-23-24-22+20=38$，

所求 $=45-n(A\cup B\cup C)=45-38=7$.

10.設 a 為一整數，二集合 $A=\{2,3,a^2-5a+10\}$，$B=\{2a-2,-5a+13,-a+6\}$，

$A\cap B=\{3,4\}$，則 a 之值 $=$ ＿＿＿＿＿＿ .

解答　3

解析 $A\cap B=\{3,4\} \Rightarrow a^2-5a+10=4 \Rightarrow a^2-5a+6=0 \Rightarrow a=2$ 或 3，

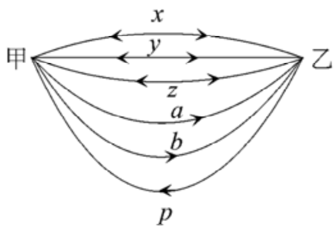
① $a=2 \Rightarrow \begin{cases}A=\{2,3,4\}\\B=\{2,3,4\}\end{cases} \Rightarrow A\cap B\neq\{3,4\}$，故 $a=2$ 不合．

② $a=3 \Rightarrow \begin{cases}A=\{2,3,4\}\\B=\{4,-2,3\}\end{cases} \Rightarrow A\cap B=\{3,4\}$，合理．故 $a=3$．

11.甲地與乙地之間共有六條道路，其中三條是雙向道，兩條是甲地到乙地的單向道，一條是乙地到甲地的單向道．今有一人從甲地騎車到乙地，請問：

(1)有__________條路徑供他選擇．

(2)如果他從甲地騎車到乙地，再騎回甲地，那麼他有__________種方法．



解答 (1)5;(2)20

解析 (1)甲到乙的路徑有 5 條．

(2)甲到乙再回到甲的路徑，

先由甲到乙有 5 條走法，由乙到甲有 4 條，共 $5\times4=20$ 條路徑．

12.1 到 1000 中，求： (1)3 或 5 的倍數有________個． (2)不是 6 也不是 4 的倍數有________個．

解答 (1)467;(2)667

解析 (1)$[\frac{1000}{3}]+[\frac{1000}{5}]-[\frac{1000}{15}]=333+200-66=467$（個）．

(2) $1000-[\frac{1000}{4}]-[\frac{1000}{6}]+[\frac{1000}{12}]=1000-250-166+83=667$（個）．

13.301 至 600 之間的正整數，則：

(1)有__________個 2 或 3 或 5 的倍數． (2)有__________個 4 或 6 或 15 的倍數．

解答 (1)220;(2)110

解析 (1)設 301 到 600 中的正整數，被 2，3，5 整除的數各形成一個集合 A，B，C，則

$n(A)=[\frac{600}{2}]-[\frac{300}{2}]=150$（$[x]$表不大於 x 的最大整數），

$n(B)=[\frac{600}{3}]-[\frac{300}{3}]=100$，$n(C)=[\frac{600}{5}]-[\frac{300}{5}]=60$，

$n(A\cap C)=[\frac{600}{10}]-[\frac{300}{10}]=30$，$n(A\cap B)=[\frac{600}{6}]-[\frac{300}{6}]=50$，

$n(B\cap C)=[\frac{600}{15}]-[\frac{300}{15}]=20$，$n(A\cap B\cap C)=[\frac{600}{30}]-[\frac{300}{30}]=10$，

由取捨(排容)原理可得 $n(A\cup B\cup C)=150+100+60-50-20-30+10=220$．

(2)設 301 到 600 的正整數被 4，6，15 整除的數各形成一個集合 A，B，C，則

$n(A)=[\frac{600}{4}]-[\frac{300}{4}]=75$，$n(B)=[\frac{600}{6}]-[\frac{300}{6}]=50$，$n(C)=[\frac{600}{15}]-[\frac{300}{15}]=20$，

$n(A\cap B)=[\frac{600}{12}]-[\frac{300}{12}]=25$，$n(B\cap C)=[\frac{600}{30}]-[\frac{300}{30}]=10$，

$n(C\cap A)=[\frac{600}{60}]-[\frac{300}{60}]=5$，$n(A\cap B\cap C)=[\frac{600}{60}]-[\frac{300}{60}]=5$，

由排容原理可知 $n(A\cup B\cup C)=75+50+20-25-10-5+5=110$．

14.3600　(1)有＿＿＿＿＿＿個正因數．　(2)這些正因數中，有＿＿＿＿＿＿個是 30 的倍數．

解答　(1)45;(2)16

解析　(1)$3600=2^4\times3^2\times5^2$，3600 的正因數有 $5\times3\times3=45$ 個．

(2)$3600=30\times120=30\,(2^3\times3\times5)$，所以 3600 的正因數中，30 的倍數有 $4\times2\times2=16$ 個．

15.1 至 800 的自然數中與 42 互質者有＿＿＿＿＿＿個．

解答　229

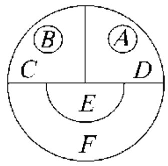
解析　1 至 800 的自然數中與 42 互質，即去掉 2 或 3 或 7 的倍數

$$n(A_2'\cap A_3'\cap A_7')=n(A_2\cup A_3\cup A_7)'=800-n(A_2\cup A_3\cup A_7)$$

$$\Rightarrow\quad 800-([\frac{800}{2}]+[\frac{800}{3}]+[\frac{800}{7}]-[\frac{800}{6}]-[\frac{800}{21}]-[\frac{800}{14}]+[\frac{800}{42}])$$

$$=800-(400+266+114-133-38-57+19)=229\text{．}$$

16.以紅、藍、黃、綠、橙、紫、黑七色塗下圖之 A，B，C，D，E，F 六部分，每一部分僅以一色塗之，顏色可重複使用，相鄰部分必須不同色，則有＿＿＿＿＿＿種塗法．

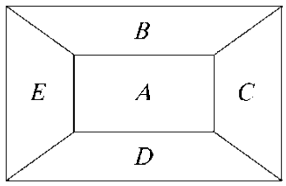


解答　30240

解析

$$\begin{array}{ccccccccccc} C & & D & & E & & F & & A & & B \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 7 & \cdot & 6 & \cdot & 5 & \cdot & 4 & \cdot & 6 & \cdot & 6=30240 \end{array}$$

17.如圖，用 4 種顏色著色，4 色都用，塗在附圖區域中，相鄰區域顏色須相異，則有＿＿＿＿種塗法．



解答　48

解析　依 A，B，C，D，E 的順序，分成兩類，

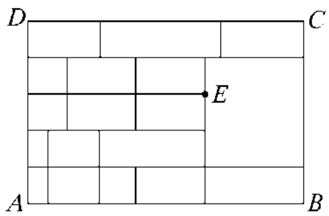
①B，D 同色、塗法有 $4\times3\times2\times1\times1=24$ 種，

②B，D 異色、塗法有 $4\times3\times1\times2\times1=24$ 種，

共有 $24+24=48$ 種塗法．

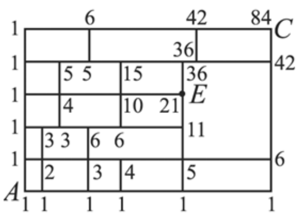
18.某地街道圖如附圖，則：(1)由 $A\to E$ 走捷徑有＿＿＿種走法．

(2)$A\to C$ 走捷徑有＿＿＿種走法．

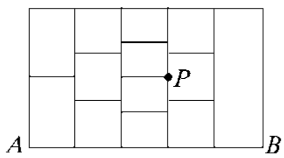


解答　(1)21;(2)84

解析



19.如圖，由 A 到 B 只可向(↑)(↓)(→)走的走法



(1)有＿＿＿＿＿＿種．　(2)不經過 P 點，則走法有＿＿＿＿＿＿種．

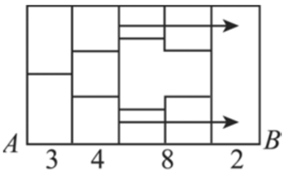
解答　(1)480;(2)192

解析　(1) $3\times4\times5\times4\times2=480$．

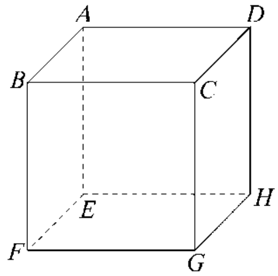
(2)如圖，

$3\times4\times(2\times2+2\times2)\times2=192$.

往上走　往下走

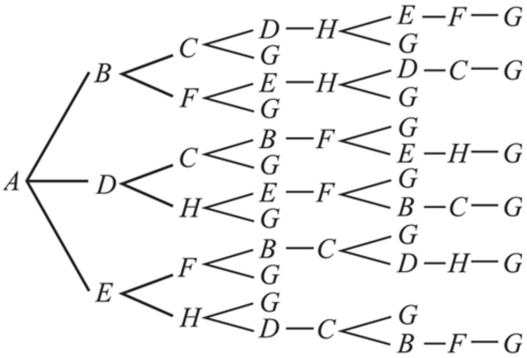


20.由一個正六面體的一頂點 A 沿著稜線走到對角線的另一頂點 G，每一個頂點只能經過一次，有________種走法．



解答　18

解析　共 18 種走法．



21.在一場宴會中，與會的 30 人彼此兩兩握手寒暄，如果大家都與自己除外的每一個人握到一次手，則此次宴會中所有人共計握手了________次．

解答　435

解析　$\dfrac{(30-1)\times30}{2}=435$（次）．

22.某次數學競試有 100 個學生參加，試題僅 A，B，C 三題，測驗結果如下：答對 A 者有 51 人，答對 B 者有 36 人，只答對 C 者有 16 人，答對 B，C 兩題者有 13 人，答對 A 或 C 者有 75 人，答對 B 或 C 者有 59 人，而只答對 A，B，C 三題之一者有 66 人，則：

(1)只答對 A 者有________人．　(2)三題都答錯者有________人．

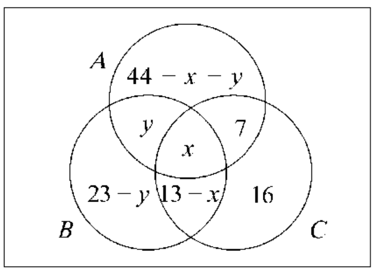
解答　(1)33;(2)8

解析　$n(B\cup C)=59, n(B)=36\Rightarrow 59-36-16=7$

$\begin{cases}51+16+(13-x)=75\\(44-x-y)+(23-y)+16=66\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=5\\y=6\end{cases}$,

(1) $44-5-6=33$（人）．

(2) $n(A\cup B\cup C)=92$，∴　$100-92=8$（人）．



23.有紙幣一元的 2 張，五元的 3 張，十元的 2 張，五十元的 1 張，這些紙幣可形成____種不同的幣值．

解答　47

解析　因 5 元紙幣有 3 張，故 10 元這一幣值，可由 2 張 5 元或 1 張 10 元紙幣組成，

而且 5 元可配出 5 元、10 元兩種幣值，而 1 張 10 元只配出 1 種幣值，

為避免重複計算及遺漏的情況，可將 10 元紙幣換成 2 張 5 元來計算，

即換成 1 元紙幣 2 張，5 元紙幣 7 張，50 元紙幣 1 張，

配出的幣值有$(2+1)(7+1)(1+1)-1=47$ 種．

24.若 $A=\{x，y，z\}$，$B=\{x+1，2，3\}$，且 $A=B$，則$(x，y，z)$之解共有____________組．

解答 5

解析 $\because$ $A=B$ 且 $x\neq x+1$ $\Rightarrow$ $x=2$ 或 $x=3$，

①若 $x=2$ 時，$A=\{2，y，z\}$，$B=\{3，2，3\}=\{2，3\}$，

$\therefore$ $\begin{cases}y=2\\z=3\end{cases}$，$\begin{cases}y=3\\z=2\end{cases}$，$\begin{cases}y=3\\z=3\end{cases}$，有 3 組解．

②若 $x=3$ 時，$A=\{3，y，z\}$，$B=\{4，2，3\}$，$\therefore$ $\begin{cases}y=2\\z=4\end{cases}$，$\begin{cases}y=4\\z=2\end{cases}$，有 2 組解．

由①，②知，共有 5 組解．

25.設一室有 5 個門，兄弟二人由不同門進入，不同門出來，則：

(1)自己可以由相同門進出時，其方法有____________種．

(2)自己不可以由相同門進出時，其方法有____________種．

解答 (1)400;(2)260

解析 (1)兄先進入方法有 5 種，弟再進入方法有 4 種，

兄出來時方法有 5 種，弟出來時方法有 4 種，

由乘法原理知：進出方法共有 $5\times4\times5\times4=400$ 種．

(2)兄由弟進入時的門出來，其法有 $5\times4\times(1\times4)=80$ 種，

兄不經由弟進入時的門出來，其法有 $5\times4\times(3\times3)=180$ 種，

故進出方法有 $80+180=260$ 種．

26.假設美國職棒大聯盟比賽，一場球賽下來通常需要三種投手（先發、中繼、終結）．已知洋基隊的投手陣容有先發投手 5 名，中繼投手 4 名與終結投手 3 名；若以每場比賽需先發、中繼、終結投手各 1 名，來安排投手出賽名單，則可有_________種不同的投手出賽名單．

解答 60

解析 依乘法原理：$5\cdot4\cdot3=60$ ．

27.新新鞋店為與同業進行促銷戰，推出「第二雙不用錢⋯買一送一」的活動；該鞋店共有八款鞋可供選擇，其價格如下：

款式	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛
價格	670	670	700	700	700	800	800	800

規定所送的鞋之價格一定少於所買的價格（例如：買一雙「丁」款鞋，可送甲、乙兩款鞋之一），若有一位新新鞋店的顧客買一送一，則該顧客所帶走的兩款鞋，其搭配方法共有____________種．

解答 21

解析 買 800 元款送 700 元款有$3\times3=9$種，

買 800 元款送 670 元款有$3\times2=6$種，

買 700 元款送 670 元款有$3\times2=6$種，

由加法原理得$9+6+6=21$（種）．

28.設〈 a_n 〉為首項 3，公差 4 的等差數列，〈 b_n 〉為首項 2，公差 3 的等差數列，且集合 $A=\{a_n\,|\,a_n<1000，n\in\mathbb{N}\}$，$B=\{b_n\,|\,b_n<1000，n\in\mathbb{N}\}$，求 $n(A\cap B)=$____________．

解答 83

解析 $a_n = 3+4(n-1) = 4n-1$， $n \in \mathbb{N}$， $b_l = 2+3(\ell-1) = 3\ell-1$， $\ell \in \mathbb{N}$，
$A \cap B = \{c_k \mid c_k \in A$ 且 $c_k \in B$， $k \in \mathbb{N}\}$，故 $4n-1 = 3\ell-1 \Rightarrow 4n = 3\ell$，
取 $n = 3k$， $\ell = 4k$， 得 $c_k = 12k-1$，故 $n(A \cap B) = [\frac{1001}{12}] = 83$.

29.某公司生產多種款式的「阿民」公仔，各種款式只是球帽、球衣或球鞋顏色不同．其中球帽共有黑、灰、紅、藍四種顏色，球衣有白、綠、藍三種顏色，而球鞋有黑、白、灰三種顏色．公司決定紅色的球帽不搭配灰色的鞋子，而白色的球衣則必須搭配藍色的帽子，至於其他顏色間的搭配就沒有限制．在這些配色的要求之下，最多可有____________種不同款式的「阿民」公仔．

解答 25

解析 若球衣為白色時，最多有 $1 \times 3 = 3$ 種方法，
若球衣為綠色時，最多有 $4 \times 3 - 1 = 11$ 種方法（扣除紅色球帽配灰色球鞋），
若球衣為藍色時，最多有 $4 \times 3 - 1 = 11$ 種方法（扣除紅色球帽配灰色球鞋），
故共有 $3 + 11 + 11 = 25$ 種方法．