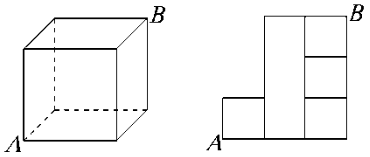
<table>
<tr><td colspan="7">高雄市明誠中學 高一數學平時測驗　　日期：102.04.15</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範圍</td><td rowspan="2">2-2.排列(A)</td><td>班級</td><td>一年____班</td><td rowspan="2">姓名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

一、填充題 （每題 10 分 ）

1.在圖(一)與圖(二)中，求從 A 走到 B 的捷徑有多少條？

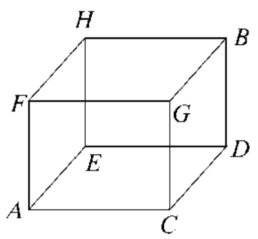
(1)圖(一)，捷徑有__________條． (2)圖(二)，捷徑有__________條．



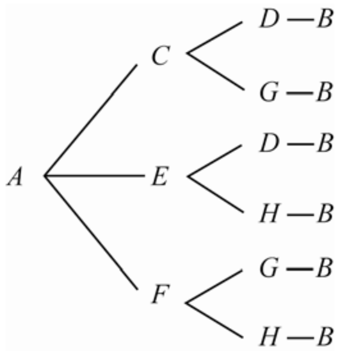
圖(一)　　圖(二)

解答 (1)6;(2)6

解析 (1)如圖(一)，由 A 到 B 的捷徑：



圖(一)

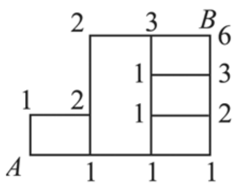


，共有 6 條，

（乘法原理應用）由 A 開始，可在 C，E，F 中任選一條，

然後再朝 B 的捷徑，各有兩條選擇，所以共有 $3\times2=6$（條）．

(2)加法原理，如圖(三)：



圖(三)

共 6 條捷徑．

2.50 元鈔票一張，兌換成 10 元與 5 元的硬幣，則：

(1)有__________種方法．

(2)如果兌換成 10 元，5 元及 1 元的硬幣，每種硬幣至少有一個，有__________種方法．

解答 (1)6;(2)16

解析 (1)設 50 元換成 10 元與 5 元硬幣各換 x 個與 y 個，則 $10x+5y=50$，

求其中 x，y 的非負整數解，即 $2x+y=10$ 的非負整數解，

$x=0$，1，2，3，4，5 時，各恰有一個 y 的解，所以共有 6 種換法．

(2)設 50 元換成 10 元，5 元，1 元硬幣，各換 x，y，z 個，則 $10x+5y+z=50$，其中 x，y，z 的正整數解，

①當 $x=1$ 時，$5y+z=40$ 的正整數解有 7 組解．

②當 $x=2$ 時，$5y+z=30$ 的正整數解有 5 組解．

③當 $x=3$ 時，$5y+z=20$ 的正整數解有 3 組解．

④當 $x=4$ 時，$5y+z=10$ 的正整數解有 1 組解．

所以共有 $7+5+3+1=16$ 種換法．

3.3600 (1)有____________個正因數． (2)這些正因數中，有____________個是 30 的倍數．

解答 (1)45;(2)16

解析 (1)$3600=2^4\times 3^2\times 5^2$,

3600 的正因數有 $5\times 3\times 3=45$ 個．

(2)$3600=30\times 120=30\ (2^3\times 3\times 5)$ ，

所以 3600 的正因數中，30 的倍數有 $4\times 2\times 2=16$ 個．

4.周長為 30 且三邊長都是整數的等腰三角形有____________個．

解答 7

解析 周長為 30 且三邊長都是整數的等腰三角形，

設三邊長 x，x，y，則 $\begin{cases}2x+y=30\\2x>y\end{cases}$ ，

①由於 $y=2(15-x)$，可知 y 必為偶數．

②兩邊之和大於第三邊，$\therefore y<2x$，又 $2x+y=30$，故 $y<15$．

y	14	12	10	8	6	4	2
x	8	9	10	11	12	13	14

共有 7 個等腰三角形．

5.某自助餐廳備有肉 4 種，魚 3 種，蔬菜 5 種，一位客人預計各點一種肉、魚和蔬菜，請問他有__________種點菜的方式．

解答 60

解析 $4\times 3\times 5=60$（種）．

6.教室有五門，甲、乙二人由不同門進入，由不同門出來，且各人不可由同一門進出，則有___種走法．

解答 260

解析 進入：$5\times 4=20$．

出來：

①甲由乙進之門出：$1\times 4=4$，②甲不由乙進之門出：$3\times 3=9$， $\therefore$出來有 $4+9=13$ 種．

共有 $20\times 13=260$ 種．

7.在一場宴會中，與會的 20 人彼此兩兩握手寒暄，如果大家都與自己除外的每一個人握到一次手，則此次宴會中所有人共計握手了____________次．

解答 190

解析 $\dfrac{(20-1)\times 20}{2}=190$（次）．

8.7200 之正因數中為 5 的倍數但不為 9 的倍數者有____________個．

解答 24

解析 $7200=2^5\cdot 3^2\cdot 5^2$，$d\mid 7200$ 且 $5\mid d$，但 $9\nmid d$，

則 d 為$(2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5)(3^0+3^1)(5^1+5^2)$展開式的各項，$d$ 共有 $6\times 2\times 2=24$ 個．

9.小於 1000 的自然數中，

(1)不是 3 且不是 5 的倍數者有____________個．

(2)是 3 或 5 或 7 的倍數者有____________個．

(3)是 3 或 5 但不為 7 的倍數者有____________個．

解答 (1)533;(2)542;(3)400

解析 (1) $999-([\frac{999}{3}]+[\frac{999}{5}]-[\frac{999}{15}])=999-333-199+66=533$．

(2) $[\frac{999}{3}]+[\frac{999}{5}]+[\frac{999}{7}]-[\frac{999}{15}]-[\frac{999}{35}]-[\frac{999}{21}]+[\frac{999}{105}]=542$．

(3) $[\frac{999}{3}]+[\frac{999}{5}]-[\frac{999}{15}]-[\frac{999}{35}]-[\frac{999}{21}]+[\frac{999}{105}]=400$．

10.用 1 克，2 克，4 克，8 克，16 克五個砝碼之中的幾個（至少一個），則：

(1)可秤出____________種不同重量．　(2)這些可秤得的克數之總和=____________．

解答 (1)31;(2)496

解析 (1)1 克，2 克，4 克，8 克，16 克砝碼中，

至少取一個的取法有 $2\times2\times2\times2\times2-1=31$ 種，

所有取法都可秤出不同的重量，所以共可秤 31 種不同的重量．

(2)可秤得的重量和 $=1+2+3+\cdots+31=\frac{1}{2}(1+31)\times31=496$．

11.1 至 800 的自然數中與 42 互質者有____________個．

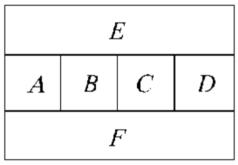
解答 229

解析 1 至 800 的自然數中與 42 互質，即去掉 2 或 3 或 7 的倍數

$\Rightarrow\ 800-([\frac{800}{2}]+[\frac{800}{3}]+[\frac{800}{7}]-[\frac{800}{6}]-[\frac{800}{21}]-[\frac{800}{14}]+[\frac{800}{42}])$

$=800-(400+266+114-133-38-57+19)=229$．

13.用六種不同的顏色著附圖，規定同色不相鄰，且每面恰用一色，則著色法有____________種．



解答 5160

解析 先塗相鄰區最多的 E，F，再塗 A，B，C，D，

①當 E，F 同色時，著色法有 $6\times1\times5\times4\times4\times4=1920$，

②當 E，F 異色時，著色法有 $6\times5\times4\times3\times3\times3=3240$，

故所有著色法有 $1920+3240=5160$ 種．

14.自然數 158760 的正因數中，求：

(1)為完全平方數者有____________個．　(2)完全立方數者有____________個．

解答 (1)12;(2)4

解析 將 158760 作因數分解得標準分解式 $158760=2^3\times3^4\times5\times7^2$，

(1)正因數為完全平方者為從下列三括號各取一數之積

$(2^0，2^2)$，$(3^0，3^2，3^4)$，$(7^0，7^2)$，$\therefore$ 完全平方者有 $2\times3\times2=12$ 個．

(2)正因數為完全立方者為從下列二括號各取一數之積

$(2^0，2^3)$，$(3^0，3^3)$，$\therefore$ 完全立方者有 $2\times2=4$ 個．

15.甲、乙、丙、丁、戊等 5 人，每人都會洗碗，也會做飯，但每餐飯，做飯者不洗碗，某假日午、晚兩餐，做飯者非同一人，洗碗者也非同一人，問有__________種情形．

解答　260

解析　如下：

午餐	做飯	洗碗
晚餐	做飯	洗碗

轉換 $\Rightarrow$

A	B
C	D

相當於 5 種不同顏色塗上圖區域而相鄰不同色，

$\boxed{AD}$　B　C

① A，D 同色：$5\times4\times4=80$，

A　D　B　C

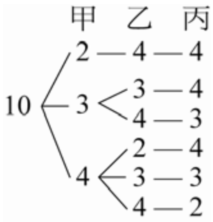
② A，D 異色：$5\times4\times3\times3=180$，

$\therefore\ \ 80+180=260$．

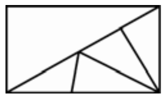
16.將 10 顆相同的糖果，分給甲、乙、丙三人，每人至少 2 顆，至多 4 顆，共有__________種分法．

解答　6

解析　共有 6 種分法．

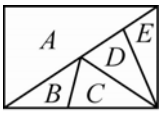


17.阿銘回到家裡後想要彩繪臥室的一面牆如圖，若以 4 色塗入各區，每區一色且相鄰區不得同色，顏色可重複使用，則有__________種不同的塗法．



解答　168

解析　如圖，5 個區域只有 4 個顏色



①若 B，D 同色，則塗法有 $\underset{A}{\underline{4}}\times\underset{B}{\underline{3}}\times\underset{C}{\underline{3}}\times\underset{D}{\underline{1}}\times\underset{E}{\underline{2}}=72$ 種．

②若 B，D 不同色，則塗法有 $\underset{A}{\underline{4}}\times\underset{B}{\underline{3}}\times\underset{D}{\underline{2}}\times\underset{C}{\underline{2}}\times\underset{E}{\underline{2}}=96$ 種．

故共有 $72+96=168$ 種塗法．

18.n 為正整數，若 $P_3^n : P_3^{n+2}=5:12$，則 $n=$__________．

解答　7

解析　$P_3^n : P_3^{n+2}=5:12$，即 $\dfrac{n\times(n-1)(n-2)}{(n+2)(n+1)n}=\dfrac{5}{12}$，

亦即 $5(n+2)(n+1)=12(n-1)(n-2)$

$\Leftrightarrow\quad 5(n^2+3n+2)=12(n^2-3n+2)$

$\Leftrightarrow\quad 7n^2-51n+14=0\quad\Leftrightarrow\quad n=7$ 或 $\dfrac{2}{7}$，但 n 是整數，所以 $n=7$．

19.用 1，2，⋯，9 寫出數字不重複的 3 位數，則這些數中偶數有____________個．

解答 224

解析 $4\times8\times7=224$．

└→ 末位 2,4,6,8

20.從 1，2，3，4，5，6，7 七個數中，組成數字不重複的三位數，則其中 3 的倍數有____________個．

解答 78

解析 將 7 個數字分三類：$3k$ 型者有 3，6，$3k+1$ 型者有 1，4，7，$3k+2$ 型者有 2，5，

① $3k$ 型取 1 個，$3k+1$ 型取 1 個，$3k+2$ 型取 1 個再排列，

三位數有 $2\times3\times2\times3\,!=72$ 個．

② $3k+1$ 型取 3 個排列之，三位數有 $1\times3\,!=6$ 個，

∴ 三位數有 $72+6=78$ 個．

21.自 0，1，2，3，4，5 六個數字中，選取五個排成一五位數，

(1)共有五位數____________個．

(2)所得的五位數中為 5 的倍數者有____________個．

(3)所得的五位數中為 4 的倍數者有____________個．

(4) 所得的五位數中為 3 的倍數者有____________個．

解答 (1)600; (2)216; (3)144; (4)216

解析 (1)$5\times P^5_4=600$．

(2)末尾必為 5 或 0 $\begin{cases}0\Rightarrow1\times P^5_4=120\\5\Rightarrow1\times4\times P^4_3=96\end{cases}$；共 120 + 96=216

(3)末兩位為 4 的倍數 $\begin{cases}\text{含}0:\quad 04;20;40\Rightarrow3\times(P^4_3)=72\\\text{不含}0:12;24;32;52;\Rightarrow4\times(3\times P^3_2)=72\end{cases}$；共 144

(4) 將 6 個數字分三類：$3k$ 型者有 0，3，$3k+1$ 型者有 1，4，$3k+2$ 型者有 2，5，各 2

$3k$ 型取 1 個，$3k+1$ 型取 1 個，$3k+2$ 型取 1 個再排列，

五位數有 $\begin{cases}\text{含}0:\quad 0,1,2,4,5\Rightarrow4\times4!=96\\\text{不含}0:1,2,3,4,5,\Rightarrow5!=120\end{cases}$，

∴ 五位數有 96+120 = 216 個．

22.甲、乙、丙、丁、戊、己、庚 7 人排成一列，則：

(1)甲、乙、丙相連有____________種排法．

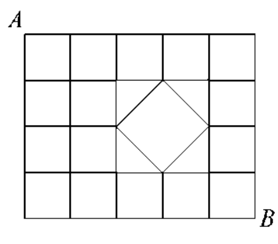
(2)甲、乙、丙完全分開有____________種排法．

解答 (1)720;(2)1440

解析 (1)先把甲、乙、丙看成一人作排列後，甲、乙、丙再排列，則有 $5!\times3!=720$ 種排法．

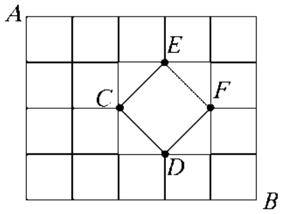
(2)先排丁、戊、己、庚，甲、乙、丙再排入其 5 個間隔中，則有 $4!\times P^5_3=1440$ 種排法．

23.如圖所示為一含有斜線的棋盤形街道圖，今某人欲從 A 取捷徑到 B，共有______________種走法．



解答 30

解析 如圖



因三角形兩邊和大於第三邊，所以由 A 到 B 的捷徑必須經 $\overline{CD}$ 或 $\overline{EF}$ ，分兩種情形：

由加法原理知 A 到 B 的捷徑有 $18+12=30$ 種．

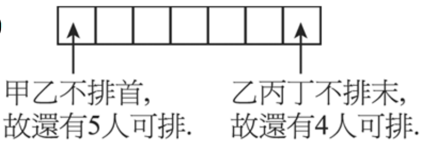
26.甲、乙、丙…等 7 人排成一列，

(1)甲不排首，乙不排第二位，丙不排末之排法有____________種．

(2)甲、乙不排首，乙、丙、丁不排末之排法有____________種．

解答 (1)3216;(2)2040

解析 (1) $7!-3\times 6!+3\times 5!-4!=3216$ ．

(2) 

但須扣掉戊、己、庚既排首又排尾的不合理情況，中間 5 人任意排 5!，

故所求為： $(5\times 4-3)\times 5!=2040$ ．