<table>
<tr><td colspan="6">高雄市明誠中學 高一數學平時測驗　　日期：102.03.11</td></tr>
<tr><td rowspan="2">範圍</td><td rowspan="2">1-1.2 數與級數(A)</td><td>班級</td><td>一年____班</td><td rowspan="2">姓名</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>座號</td><td></td></tr>
</table>

一、填充題 （每題 10 分 ）

1.有一個 7 行 10 列的表，從第 1 列第 1 行的空格開始，由左向右按照順序填入正整數 1，2，3，…，如圖的方式，一直填到第 10 列第 7 行的空格 70 為止，則:

(1)第 4 列第 3 行的數字為____________．

(2)數字 39 填在第幾列第幾行____________．

(3)從第 2 列開始，每一列的數字會比前一列總和共多____________．

	第1行	第2行					第7行
第 1 列	1	2	3	4	5	6	7
	8	9	10	11	12	13	14
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
第 10 列	64	65	66	67	68	69	70

解答　(1)24;(2)第 6 列第 4 行;(3)49

解析　(1)每一列有 7 個數，前 3 列共出現 21 個數，∴第 4 列為 22，23，24，第 3 行為 24．

(2)前 5 列共出現 35 個數，　∴第 6 列開始為 36，37，38，39，　∴39 為第 6 列第 4 行．

(3)每一列的每一個數字均比前一列多 7，　∴總和共多 $7\times 7=49$．

2.若 a，-54，b，c，2 五數成等比數列，且 a，$b+x$，c 三數成等差數列，則 x^2 之值為____________．

解答　3600

解析　-54，b，c，2 成等比，設公比為 r，

則 $2=(-54)r^3 \Rightarrow r^3=-\frac{1}{27}\Rightarrow r=-\frac{1}{3}$

$\therefore a=162$，$b=18$，$c=-6$，$\Rightarrow 2(18+x)=162+(-6)\Rightarrow x=60$，故 $x^2=3600$．

3.一等差數列 a_1，a_2，a_3，……，a_n，已知 $a_1+a_3+a_5=15$，$a_1\cdot a_3\cdot a_5=45$，若公差 d 為負數，則第 88 項 $a_{88}=$____________．

解答　-165

解析　設公差為 d，則 $a_1+a_3+a_5=(a_3-2d)+a_3+(a_3+2d)=15$，$\Rightarrow 3a_3=15\Rightarrow a_3=5$，

$a_1\cdot a_3\cdot a_5=(5-2d)\cdot 5\cdot(5+2d)=45$，$\Rightarrow 25-4d^2=9\Rightarrow d^2=4\Rightarrow d=\pm 2$（取負），

$\Rightarrow a_1=5-(-4)=9$，故 $a_{88}=9+(88-1)(-2)=-165$．

4.設 $\sum_{k=1}^{n} a_k=\frac{n}{n+1}$，則 $a_7=$____________．

解答　$\frac{1}{56}$

解析　$a_7=\sum_{k=1}^{7} a_k-\sum_{k=1}^{6} a_k=\frac{7}{8}-\frac{6}{7}=\frac{1}{56}$．

5.求 $11^3+12^3+\ldots+20^3$ 之值為____________.

解答　41075

解析　$11^3+12^3+\ldots+20^3=(1^3+2^3+\ldots+20^3)-(1^3+2^3+\ldots+10^3)$

$$=(\frac{20\cdot 21}{2})^2-(\frac{10\cdot 11}{2})^2=44100-3025=41075\ .$$

6.求 $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+19^2-20^2=$____________.

解答　-210

解析　原式 $=(1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+20^2)-2(2^2+4^2+\ldots+20^2)$

$$=\frac{20\cdot 21\cdot 41}{6}-2\cdot 2^2(\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6})=-210\ .$$

7.求$(2^2-1)+(3^2-2)+(4^2-3)+\ldots+(20^2-19)=$____________.

解答　2679

解析　原式$=\sum_{k=2}^{20}k^2-\sum_{k=1}^{19}k=(\sum_{k=1}^{20}k^2-1^2)-\sum_{k=1}^{19}k=\frac{20\times 21\times 41}{6}-1-\frac{19\times 20}{2}=2679$.

8.求 $1\times 3+2\times 5+3\times 7+4\times 9+\ldots+30\times 61=$____________.

解答　19375

解析　原式$=\sum_{k=1}^{30}k(2k+1)=\sum_{k=1}^{30}(2k^2+k)=2\sum_{k=1}^{30}k^2+\sum_{k=1}^{30}k$

$$=2\times\frac{30\cdot 31\cdot 61}{6}+\frac{30(30+1)}{2}=10\times 31\times 61+15\times 31=19375\ .$$

9.求 $1\cdot 2+3\cdot 4+5\cdot 6+\ldots+99\cdot 100=$____________.

解答　169150

解析　原式$=\sum_{k=1}^{50}(2k-1)\cdot 2k=4\sum_{k=1}^{50}k^2-2\sum_{k=1}^{50}k=4\cdot\frac{50\cdot 51\cdot 101}{6}-2\cdot\frac{50\cdot 51}{2}=171700-2550=169150$.

10.級數 $1+2-3+4+5-6+7+8-9+\ldots$依此規則繼續下去至 100 項止，其總和為____________.

解答　1684

解析　原式 $=(1+2+3+\ldots+100)-2(3+6+9+\ldots+99)$

$$=(1+2+3+\ldots+100)-6(1+2+\ldots+33)\ =\frac{100\cdot 101}{2}-6\cdot\frac{33\cdot 34}{2}=1684\ .$$

11.求等差級數 $20+18\frac{4}{5}+17\frac{3}{5}+\cdots$ 至第 10 項的和為____________.

解答　146

解析　公差 $d=18\frac{4}{5}-20=-1\frac{1}{5}$，$\therefore$總和 $S_{10}=\dfrac{10[2\times 20+(10-1)(-1\frac{1}{5})]}{2}=146$.

12.有一等差級數 $1.5+1.8+2.1+\ldots$到第 n 項的和為 60，求 n 之值為____________.

解答　16

解析　$a_1=1.5$，$d=1.8-1.5=0.3$，$S_n=60$，$S_n=\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}=\dfrac{n[3+(n-1)\cdot 0.3]}{2}=60$

$\Rightarrow n^2+9n-400=0\Rightarrow(n+25)(n-16)=0\Rightarrow\because n=-25$（不合），$\therefore n=16$.

13.有一等差數列共有 6 項，其和為 -87，首項比末項小 25，求此數列的末項為____________．

解答　-2

解析　設首項為 a_1，末項為 a_n，$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，$S_6=\dfrac{6(a_n-25+a_n)}{2}=-87\Rightarrow a_n=-2$．

14.有一等差數列的首項為 -3，若其第 5 項與第 9 項的比為 1 ： 3，求第 15 項為____________．

解答　18

解析　設公差為 d，$(-3+4d):(-3+8d)=1:3\Rightarrow -3+8d=-9+12d\Rightarrow d=\dfrac{3}{2}$

$\therefore a_{15}=-3+14\times\dfrac{3}{2}=18$．

15.有一表演廣場共有 25 排座位，依次每一排比前一排多 2 個座位，已知最後一排有 80 個座位，求此表演廣場共有____________個座位．

解答　1400

解析　$n=25$，$d=2$，$a_{25}=a_1+(25-1)d=a_1+24\times 2=80\Rightarrow a_1=32$，$\therefore S_{25}=\dfrac{25(32+80)}{2}=1400$．

16.設 a，b，c，d，e 成等比數列，且 $abcde=243$，求 $c=$____________．

解答　3

解析　設 a，b，c，d，e 分別為 $\dfrac{c}{r^2}$，$\dfrac{c}{r}$，c，cr，cr^2，則

$abcde=\dfrac{c}{r^2}\cdot\dfrac{c}{r}\cdot c\cdot cr\cdot cr^2=243\Rightarrow c^5=243\Rightarrow c=3$．

17.求等比級數 $4+4\cdot 3+4\cdot 3^2+\ldots$至第 6 項之和為____________．

解答　1456

解析　$a_1=4$，$r=3$，$n=6$，$S_6=\dfrac{4(3^6-1)}{3-1}=\dfrac{4(729-1)}{2}=1456$．

18.等差數列$\langle a_n\rangle$，其中 $a_n=7n+55$，$n\in\mathbb{N}$，則 $\dfrac{a_{258}-a_{369}}{258-369}$ 之值為__________．

解答　7

解析　$\dfrac{a_{258}-a_{369}}{258-369}=\dfrac{7(258)+55-7(369)-55}{258-369}=\dfrac{7(258-369)}{258-369}=7$．

19.$\langle a_n\rangle$為一數列，已知 $S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=n^2+3$，$\forall n\in\mathbb{N}$，則 $a_n=$__________．

解答　$\begin{cases}a_1=4,\ n=1\\ a_n=2n-1,\ n\ge 2\end{cases}$

解析

$$\begin{array}{rl}\because & S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n=n^2+3,\ n\ge 1\\ -) & S_{n-1}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}=(n-1)^2+3,\ n\ge 2\\ \hline & a_n=2n-1,\ n\ge 2\end{array}$$

而 $a_1=S_1=4$．

20.數列$\langle 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots\rangle$，求：

(1)第 50 項為__________．(2)前 50 項和為__________．

解答 (1) 10;(2) 335

解析 (1)分群 1，(2，2)，(3，3，3)，(4，4，4，4)，(5，5，5，5，5)，…

設第 50 項落在第 n 群，則 $1+2+3+\ldots+(n-1)<50\le 1+2+3+\ldots+n$

得 $n=10$，表第 50 項落在第 10 群，故第 50 項為 10．

(2) $S_{50}=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\ldots+9^2+(10\times 5)=\frac{1}{6}\times 9\times 10\times 19+50=335$．

21.數列$\lt a_n\gt$定義為 $a_1=1$，$n\in\mathbb{N}$ 時，$a_{n+1}=a_n+2n+1$，a_{20} 之值為__________．

解答 400

解析

$$\begin{aligned} &a_2=a_1+2\times 1+1\\ &a_3=a_2+2\times 2+1\\ &a_4=a_3+2\times 3+1\\ &\quad\vdots\\ +)\ &a_{20}=a_{19}+2\times 19+1 \end{aligned}$$

$a_{20}=a_1+2(1+2+3+\ldots+19)+1\times 19=1+2\times\frac{1}{2}\times 19\times 20+19=20+380=400$．

22.設 $a_n=(1+\frac{3}{1})\times(1+\frac{5}{4})\times(1+\frac{7}{9})\times\ldots\times(1+\frac{2n+1}{n^2})$， $n\in\mathbb{N}$，則 $a_{95}=$__________．

解答 9216

解析 $\because$ $a_n=\frac{4}{1}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{16}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{(n+1)^2}{n^2}=(n+1)^2$ $\therefore$ $a_{95}=96^2=9216$．

23.一數列$\lt a_n\gt$，已知 $a_1=3$，$a_{n+1}=2a_n+1$，$n\in\mathbb{N}$，則 $a_n=$__________．

解答 $2^{n+1}-1$

解析 設 $a_{n+1}-\alpha=2(a_n-\alpha)$ $\therefore$ $a_{n+1}=2a_n-\alpha$

而又 $a_{n+1}=2a_n+1$，$\forall n\in\mathbb{N}$ $\therefore$ $\alpha=-1$．

$$\begin{aligned} &a_1=3\\ &a_2+1=2(a_1+1)\\ &a_3-1=2(a_2+1)\\ &\quad\vdots\\ +)\ &a_n+1=2(a_{n-1}+1) \end{aligned}$$

即 $a_n+1=(3+1)\cdot 2^{n-1}$ $\Rightarrow a_n=2^{n+1}-1$．

24.一數列寫成 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{1}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{2}$，$\frac{3}{1}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{4}{1}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{3}{3}$，$\frac{4}{2}$，$\frac{5}{1}$，…，按此規則推算下去，則 $\frac{7}{10}$ 應是第__________項．

解答 127

解析 此數列的分子.分母和為 2，3，4，…各有 1，2，3，…個，而 $\frac{7}{10}$ 的分子與分母和為 17．

此數列的分子分母之和小於或等於 16 者共有 $1+2+3+\ldots+15=120$ 項

第 121 項起，依序為 $\frac{1}{16}$，$\frac{2}{15}$，$\frac{3}{14}$，$\frac{4}{13}$，$\frac{5}{12}$，$\frac{6}{11}$，$\frac{7}{10}$，$\frac{8}{9}$，$\frac{9}{8}$，…$\therefore$ $\frac{7}{10}$ 為第 127 項．

25.設數列< a_n >滿足下列條件 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + (n+1)^3$,求此數列的一般項 a_n, $n \in \mathbb{N}$,則 $a_n =$ ________.

解答 $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

解析

$$\begin{aligned} & a_1 = 1 \\ & a_2 = a_1 + 2^3 \\ & a_3 = a_2 + 3^3 \\ & \vdots \\ +)\ & a_n = a_{n-1} + n^3 \\ \hline & a_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \end{aligned}$$

26.求 $1 + 1^2 + 2 + 2^2 + 3 + 3^2 + \ldots + 30 + 30^2$ 之和=__________ .

解答 9920

解析 原式= $(1 + 2 + \ldots + 30) + (1^2 + 2^2 + \ldots + 30^2)$

$= \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 31 + \frac{1}{6} \cdot 30 \cdot 31 \cdot 61 = 465 + 9455 = 9920$.

27.設 $a_1 = 1$,對任意正整數 n, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 3$ 恆成立,我們可將它化成 $a_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2}(a_n - \alpha)$的等比形式,則(1) $\alpha =$__________ . (2) $a_n =$__________ .

解答 (1)6;(2) $6 - 5(\frac{1}{2})^{n-1}$

解析 (1)$\because$ $a_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2}(a_n - \alpha)$ $\therefore$ $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}\alpha$

而又 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\therefore$ $\frac{1}{2}\alpha = 3$ $\therefore$ $\alpha = 6$.

(2)

$$\begin{aligned} & a_1 = 1 \\ & a_2 - 6 = \frac{1}{2}(a_1 - 6) \\ & a_3 - 6 = \frac{1}{2}(a_2 - 6) \\ & \vdots \\ +)\ & a_n - 6 = \frac{1}{2}(a_{n-1} - 6) \\ \hline \end{aligned}$$

即 $a_n - 6 = (-5) \cdot (\frac{1}{2})^{n-1}$ $\Rightarrow \therefore$ $a_n = 6 - 5(\frac{1}{2})^{n-1}$.

28.數列< a_n >中,若 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n + 1}$ ($n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$),則 $a_n =$____________(以 n 表示) .

解答 $\frac{1}{n}$

解析 $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{1}{4}$, …, $a_n = \frac{1}{n}$.

29.數列$\langle a_n \rangle$滿足$a_1=\frac{1}{7}$，$a_{n+1}=\frac{7}{2}a_n(1-a_n)$，$n\in\mathbb{N}$，求$a_{101}+a_{202}=$____________．

解答 $\frac{9}{7}$

解析 $a_2=\frac{7}{2}\times\frac{1}{7}\times\frac{6}{7}=\frac{3}{7}$，

$a_3=\frac{7}{2}\times\frac{3}{7}\times\frac{4}{7}=\frac{6}{7}$，

$a_4=\frac{7}{2}\times\frac{6}{7}\times\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$，

$a_5=\frac{7}{2}\times\frac{3}{7}\times\frac{4}{7}=\frac{6}{7}$，

$\vdots$

$\therefore$當n為偶數時$a_n=\frac{3}{7}$；當n為奇數時$a_n=\frac{6}{7}$，$n>1$　$a_{101}=\frac{6}{7}$，$a_{202}=\frac{3}{7}$，

所求$=\frac{6}{7}+\frac{3}{7}=\frac{9}{7}$．

30.數列1，3，7，15，31，63，…，依此規則推算，則第n項$a_n=$____________．

解答 2^n-1

解析

$$\begin{array}{l}\langle a_n\rangle：1,\ 3,\ 7,\ 15,\ 31,\ 63,\ \cdots,\ a_{n-1},\ a_n,\\ \qquad\quad \vee\ \ \vee\ \ \vee\ \ \ \vee\ \ \ \vee\qquad\quad \vee\\ \qquad\quad 2\ \ \ 4\ \ \ 8\ \ \ 16\ \ 32\ \ \cdots\ \ b_{n-1}\end{array}$$

令$b_{n-1}=a_n-a_{n-1}\Rightarrow\langle b_n\rangle$為等比數列且$b_1=2$，$r=2$，

$\therefore a_n=1+(2+4+8+16+\ldots+b_{n-1})=1+\frac{2\times(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n-1$．

31.數列$\{a_n\}=\{\frac{1}{3},\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{9},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{1}{8},\frac{1}{27},\frac{1}{10},\frac{1}{11},\ldots,\frac{1}{26},\frac{1}{81},\frac{1}{28},\ldots,\frac{1}{80},\ldots\}$，

試問若依此規律，則$\frac{1}{2013}$是第____________項．

解答 2014

解析 依規則可知當分母$\neq 3^n$型式時，分母值比項數小1$\Rightarrow\frac{1}{2013}$為第2014項．

32.若一數列定義如下：$a_1=2$，$a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n}$，$n\in\mathbb{N}$，則此數列的一般項$a_n=$____________．（以n的形式表示）

解答 $\frac{n+1}{n}$

解析 $a_2=2-\frac{1}{a_1}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，

$a_3 = 2 - \frac{1}{a_2} = 2 - \frac{1}{\frac{3}{2}} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$，

$a_4 = 2 - \frac{1}{a_3} = 2 - \frac{1}{\frac{4}{3}} = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$，

$\vdots$

$a_n = \frac{n+1}{n}$.

33.若數列$< a_n >$滿足$a_1 = \frac{1}{7}$， $a_2 = \frac{3}{7}$及$a_{n+1} = \frac{7}{2} a_n (1 - a_n)$, $n \ge 1$, 則$a_{101} - a_{100} =$ ____________ .

解答 $\frac{3}{7}$

解析 $a_1 = \frac{1}{7}$；$a_2 = \frac{3}{7}$；$a_3 = \frac{7}{2} \times a_2 \times (1 - a_2) = \frac{7}{2} \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{6}{7}$

$a_4 = \frac{7}{2} a_3 (1 - a_3) = \frac{7}{2} \times \frac{6}{7} \times \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$；$a_5 = \frac{7}{2} a_4 (1 - a_4) = \frac{7}{2} \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{6}{7}$

$\therefore$當 n 為偶數時$a_n = \frac{3}{7}$；當 n 為奇數時$a_n = \frac{6}{7}$， $n > 1 \Rightarrow a_{101} - a_{100} = \frac{6}{7} - \frac{3}{7} = \frac{3}{7}$.