

|                  |               |    |         |    |              |  |
|------------------|---------------|----|---------|----|--------------|--|
| 高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 |               |    |         |    | 日期：102.03.18 |  |
| 範圍               | 1-1.2 數與級數(B) | 班級 | 一年____班 | 姓名 |              |  |
|                  |               | 座號 |         |    |              |  |

一、填充題 (每題 10 分)

1. 一個數列  $\langle \frac{k^2+2}{2k-1} \rangle$  的第五項為\_\_\_\_\_。

**解答** 3

**解析** 代  $k=5$  代入  $\frac{k^2+2}{2k-1}$  得  $\frac{27}{9}=3$ 。

2. 將自然數用括弧分組如下 (第  $n$  組有  $n$  個數)：(1), (2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9, 10), ...

(1) 第 100 個括弧的第 100 個數是\_\_\_\_\_。

(2) 100 是第  $m$  個括弧的第  $n$  個數, 則數對  $(m, n)$  為\_\_\_\_\_。

**解答** (1)5050;(2)(14, 9)

**解析** (1) 第 100 個括弧的第 100 個數  $= 1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{(101)(100)}{2} = 5050$ 。

(2)  $1 + 2 + \dots + k < 100, k < 13, \dots, \therefore 1 + 2 + 3 + \dots + 13 = 91,$

$\therefore 100$  為第 14 括弧內第 9 個數,  $(m, n) = (14, 9)$ 。

3. 試求 1 到 1000 之間, 是 4 的倍數又是 6 的倍數的整數有\_\_\_\_\_個。

**解答** 83

**解析** 是 4 的倍數, 又是 6 的倍數, 即為最小公倍數 12 的倍數, 12 的倍數形成一等差數列  $\langle a_n \rangle$ ,  
 $\langle a_n \rangle = \langle 12, 24, 36, \dots \rangle$ , 首項為 12, 公差為 12,  
 $a_n = 12 + (n-1) \times 12 < 1000 \Rightarrow n = 83$ 。

4.  $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$  與  $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$  的等差中項為\_\_\_\_\_。

**解答**  $\frac{5}{2}$

**解析**  $a, b, c$  成等差  $\Leftrightarrow b$  為  $a, c$  等差中項  $\Rightarrow b = \frac{a+c}{2}$

$\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$  與  $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$  的等差中項為  $\frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} \right)$ 。

$$= \frac{1}{2} \times \frac{(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2 + (\sqrt{7}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})} = \frac{5}{2}$$

5. 若直角三角形之三邊長成等差數列, 則三邊長之比為\_\_\_\_\_。(由小至大)

**解答** 3 : 4 : 5

**解析** 設三邊長為  $a-d, a, a+d, (a, d > 0)$ , 則  $(a+d)^2 = a^2 + (a-d)^2$ ,  
 $a^2 - 4ad = 0 \Rightarrow a(a-4d) = 0 \Rightarrow a = 4d$  或 0 (0 不合),  
 $\therefore$  三邊比為  $3d : 4d : 5d = 3 : 4 : 5$ 。

6. 設  $a, b, c$  均為整數,  $1 \leq a, b, c \leq 9$ , 已知  $a, b, c$  成等差數列, 且  $0.\overline{a} + 0.4\overline{b} = 1.\overline{2c}$ , 則序組  $(a, b, c) =$ \_\_\_\_\_。

**解答** (7, 5, 3)

**解析** 原式  $\Rightarrow \frac{a}{9} + \frac{40+b}{99} = 1 + \frac{20+c}{99} \Rightarrow 11a + (40+b) = 99 + 20 + c \Rightarrow 11a + b - c = 79 \cdots \cdots \textcircled{1}$

$a, b, c$  成等差數列,  $\therefore a + c = 2b$ , 代入 $\textcircled{1}$ 式得  $b = 12a - 79$ ,  $\therefore$  取  $a = 7 \Rightarrow b = 5, c = 3$ .

7. 在 1 和 100 之間放入  $a_2, a_3, a_4, \dots, a_8, a_9$  等 8 個數, 使  $1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_8, a_9, 100$  成等差數列, 則  $a_5 =$  \_\_\_\_\_ .

**解答** 45

**解析**  $100 = 1 + (10 - 1)d, d = 11, \Rightarrow a_5 = 1 + (5 - 1) \times 11 = 45$ .

8. 等比數列  $\langle a_n \rangle$  中, 依序為  $\sqrt{2} - 1, 1, \sqrt{2} + 1, \dots$ , 則此數列第  $n$  項  $a_n =$  \_\_\_\_\_ .

**解答**  $(\sqrt{2} + 1)^{n-2}$

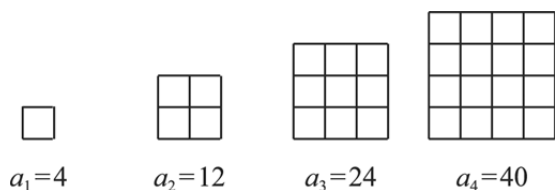
**解析**  $r = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1, \therefore a_n = a_1 r^{n-1} = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)^{n-1} = (\sqrt{2} + 1)^{n-2}$ .

9. 每月月初存入銀行 10000 元, 月息 0.1%, 按月複利計算, 則十年期滿可領回本利和 \_\_\_\_\_ 元.  
( $1.001^{120}$  大約 1.127)

**解答** 1271270

**解析** 十年本利和 =  $10000(1.001 + 1.001^2 + 1.001^3 + \dots + 1.001^{120})$   
 $= 10000 \cdot \frac{1.001(1.001^{120} - 1)}{1.001 - 1} = 10000 \cdot \frac{1.001(1.127 - 1)}{0.001}$   
 $= 10000 \cdot 1001 \cdot 0.127 = 1271270$ .

10. 利用等長的牙籤圍成正方形的方格, 以  $a_n$  表示圍成  $n \times n$  方格所用的牙籤數,  $n = 1, 2, 3, 4$  的情形如下圖, 求  $a_n =$  \_\_\_\_\_ .



**解答**  $2n^2 + 2n$

**解析**  $a_1 = 2 \times [2 \times (1)] = 2 \times [2 \cdot \frac{1 \times 2}{2}] = 2 \times (1 \times 2) = 4$

$$a_2 = 2 \times [2 \times (1 + 2)] = 2 \times [2 \cdot \frac{2 \times 3}{2}] = 2 \times (2 \times 3) = 12$$

$$a_3 = 2 \times [2 \times (1 + 2 + 3)] = 2 \times [2 \cdot \frac{3 \times 4}{2}] = 2 \times (3 \times 4) = 24$$

$$a_4 = 2 \times [2 \times (1 + 2 + 3 + 4)] = 2 \times [2 \cdot \frac{4 \times 5}{2}] = 2 \times (4 \times 5) = 40$$

$\vdots$

$$a_n = 2 \times [2 \times (1 + 2 + 3 + \dots + n)] = 2 \times [2 \cdot \frac{n \times (n+1)}{2}] = 2 \times [n \times (n+1)] = 2n^2 + 2n$$

11. 設  $P$  為質數,  $n$  為自然數,  $f(n) = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$  對一切自然數  $n$  使得  $f(n)$  為  $P$  的倍數, 則

(1) $P$  的最大值為\_\_\_\_\_。

(2)請用歸納法證明(1)

**解答** (1)7 (2)請參閱

**解析** (1) $f(1) = 3^3 + 2^3 = 35 = 5 \times 7$ ,

$$f(2) = 3^5 + 2^4 = 259 = 7 \times 37,$$

$$f(3) = 3^7 + 2^5 = 2219 = 317 \times 7, \therefore \text{推測 } P \text{ 的最大值為 } 7.$$

(2)①檢驗  $n = 1$ ,  $f(1) = 3^3 + 2^3 = 35 = 5 \times 7$  原式成立

$$\text{②設 } n = k, f(k) = 3^{2k+1} + 2^{k+2} = 7m, m \in Z$$

當  $n = k + 1$ ,  $f(k + 1) = 3^{2(k+1)+1} + 2^{(k+1)+2} = 9(3^{2k+1} + 2^{k+2}) - 7 \cdot 2^{k+1} = 7(9m - 2^{k+1})$  為 7 倍數。

12.試利用數學歸納法證明對所有正整數  $n$ ,  $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n \times (n+1)} = \frac{n}{n+1}$  恆成立。

**證明**

(1)當  $n = 1$  時, 左式  $= \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$ , 右式  $= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ , 左式=右式, 故當  $n = 1$  時原式成立。

(2)設當  $n = k$  時成立, 即  $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{k \times (k+1)} = \frac{k}{k+1}$ ,

$$\begin{aligned} \text{則當 } n = k + 1 \text{ 時, 左式} &= \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{k \times (k+1)} + \frac{1}{(k+1) \times (k+2)} \\ &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} = \text{右式}, \end{aligned}$$

根據數學歸納法, 原式對所有的正整數  $n$  都成立。

13.設數列  $\langle a_n \rangle$  滿足  $a_1 = 1, a_n = 5a_{n-1} + 8 (n = 2, 3, \dots)$ , 則  $a_n =$ \_\_\_\_\_。

**解答**  $3 \times 5^{n-1} - 2$

**解析**  $a_n - \alpha = 5(a_{n-1} - \alpha) \Rightarrow a_n = 5a_{n-1} - 4\alpha$ ,

$$\therefore -4\alpha = 8 \Rightarrow \alpha = -2 \text{ 代入, 經累積 } \Rightarrow a_n + 2 = (a_1 + 2) \times 5^{n-1} \text{ 故 } a_n = 3 \times 5^{n-1} - 2.$$

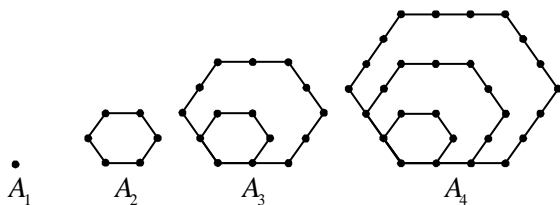
14.設數列  $\langle a_n \rangle$  的首項  $a_1 = 2$  且滿足遞迴關係式:  $a_n = 3a_{n-1} + 2, n \geq 2$  觀察歸納的規則, 試推測一般項  $a_n$  的通式 (以  $n$  表示) \_\_\_\_\_。

**解答**  $a_n = 3^n - 1, n \in \mathbb{N}$

**解析**  $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 3a_{n-1} + 2, n \geq 2 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 2 = 3^1 - 1, a_2 = 8 = 3^2 - 1, a_3 = 26 = 3^3 - 1, a_4 = 80 = 3^4 - 1$

推得  $a_n = 3^n - 1$ , 代入得  $a_{n+1} = 3(3^n - 1) + 2 = 3^{n+1} - 1, \therefore a_n = 3^n - 1, n \in \mathbb{N}$ 。

15.如圖, 設圖  $A_n$  所有點的總數  $a_n$ , 試找出  $a_{n-1}$  與  $a_n$  的關係 (其中  $n \geq 2$ ) \_\_\_\_\_。



**解答**  $a_n = a_{n-1} + 4n - 3$

**解析**  $a_1 = 1, a_2 = a_1 + 2 \times 4 - 3, a_3 = a_2 + 4 \times 3 - 3, a_4 = a_3 + 4 \times 4 - 3 \Rightarrow a_n = a_{n-1} + 4n - 3, n \geq 2$  .

16.級數和  $\sum_{n=1}^3 (2n-1)2^n =$  \_\_\_\_\_ .

**解答** 54

**解析** 所求  $= (2 \times 1 - 1)2^1 + (2 \times 2 - 1)2^2 + (2 \times 3 - 1)2^3 = 54$  .

17.數列  $\{a_n\}$  的  $a_1 = 5$  且  $a_n = a_{n-1} + (2n + 1), n$  為正整數且  $n \geq 2$ , 則  $a_n =$  \_\_\_\_\_ .

**解答**  $n^2 + 2n + 2$

**解析**  $\because a_n = a_{n-1} + 2n + 1,$

$$\therefore a_2 = a_1 + 5$$

$$a_3 = a_2 + 7$$

$$a_4 = a_3 + 9$$

$\vdots$   
 $\vdots$

$$+ ) a_n = a_{n-1} + (2n + 1)$$

$$\hline a_n = a_1 + 5 + 7 + 9 + \cdots + (2n + 1)$$

$$= 5 + \frac{(n-1)(2n+6)}{2} = n^2 + 2n + 2$$

18.計算  $\sum_{k=1}^{20} 2k(k+1) =$  \_\_\_\_\_ .

**解答** 6160

**解析**  $\sum_{k=1}^{20} 2k(k+1) = \sum_{k=1}^{20} (2k^2 + 2k) = 2 \sum_{k=1}^{20} k^2 + 2 \sum_{k=1}^{20} k$

$$= 2 \times \frac{20 \times 21 \times 41}{6} + 2 \times \frac{20 \times 21}{2} = 5740 + 420 = 6160 .$$

19.求  $1 \times 39 + 3 \times 37 + 5 \times 35 + \cdots + 37 \times 2 + 39 \times 1 =$  \_\_\_\_\_ .

**解答** 5340

**解析**  $1 \times 39 + 3 \times 37 + 5 \times 35 + \cdots + 39 \times 1$

$$= \sum_{k=1}^{20} (2k-1)(41-2k) = \sum_{k=1}^{20} (82k - 4k^2 - 41 + 2k) = \sum_{k=1}^{20} (-4k^2 + 84k - 41)$$

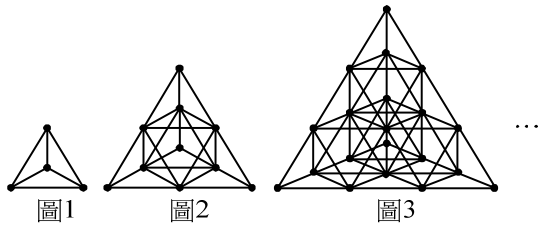
$$= -4 \times \frac{20(21)(41)}{6} + 84 \times \frac{(20)(21)}{2} - 41 \times 20 = -11480 + 17640 - 820 = 5340 .$$

20.設  $\sum_{k=1}^n a_k = \frac{n}{n+1}$ , 則  $a_9 =$  \_\_\_\_\_ .

**解答**  $\frac{1}{90}$

**解析**  $a_9 = \sum_{k=1}^9 a_k - \sum_{k=1}^8 a_k = \frac{9}{10} - \frac{8}{9} = \frac{1}{90}$  .

21.用單位長的不鏽鋼條焊接如下圖系列的四面體鋼架，圖中的小圈「 $\circ$ 」表示焊接點，圖 1 有兩層共 4 個焊接點，圖 2 有三層共 10 個焊接點，圖 3 有四層共 20 個焊接點。試問依此規律，推算圖 5 有六層共多少焊接點？\_\_\_\_\_個。



**解答** 56

**解析** 第  $l$  層有  $1+2+3+\cdots+l = \sum_{k=1}^l k = \frac{l(l+1)}{2}$  個焊接點。

圖 5 共 6 層的焊接點共有  $\sum_{l=1}^6 \frac{l(l+1)}{2} = \frac{1}{2} [\sum_{l=1}^6 l^2 + \sum_{l=1}^6 l] = \frac{1}{2} [\frac{6 \times 7 \times 13}{6} + \frac{6 \times 7}{2}] = 56$  個。

22. 求  $1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \cdots + 21^3 =$  \_\_\_\_\_。

**解答** 4961

**解析** 原式  $= (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 21^3) - 2(2^3 + 4^3 + \cdots + 20^3)$   
 $= (1^3 + 2^3 + \cdots + 21^3) - 2 \cdot 2^3(1^3 + 2^3 + \cdots + 10^3)$   
 $= (\frac{21 \cdot 22}{2})^2 - 16(\frac{10 \cdot 11}{2})^2 = 53361 - 48400 = 4961$ 。

23. 設等差數列  $\langle a_n \rangle$  與  $\langle b_n \rangle$  滿足  $\frac{a_n}{b_n} = \frac{2n+3}{6n+4}$ ，且前  $n$  項和分別為  $S_n$  與  $S'_n$ ，則  $S_{11} : S'_{11} =$  \_\_\_\_\_。

**解答** 3 : 8

**解析**

$$S_{11} : S'_{11} = 11a_6 : 11b_6 = (2 \times 6 + 3) : (6 \times 6 + 4) = 3 : 8$$

24. 數列  $\langle a_n \rangle$  中，假設  $A_n = a_1 + 2a_2 + 2^2a_3 + \cdots + 2^{n-1}a_n = n^2$ ，則數對  $(a_1, a_5) =$  \_\_\_\_\_。

**解答**  $(1, \frac{9}{16})$

**解析**  $A_1 = a_1 = 1$ ,

$$A_2 = a_1 + 2a_2 = 4 \Rightarrow a_2 = \frac{3}{2} = \frac{2 \times 2 - 1}{2}$$

$$A_3 = a_1 + 2a_2 + 4a_3 = 9 \Rightarrow a_3 = \frac{5}{4} = \frac{2 \times 3 - 1}{2^2}$$

$$A_4 = a_1 + 2a_2 + 4a_3 + 8a_4 = 16 \Rightarrow a_4 = \frac{7}{8} = \frac{2 \times 4 - 1}{2^3}, a_5 = \frac{2 \times 5 - 1}{2^4} = \frac{9}{16}$$

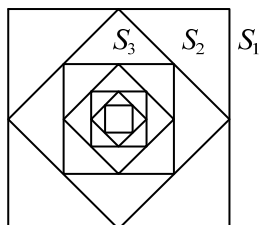
依此類推， $(a_1, a_5) = (1, \frac{9}{16})$ 。

25. 數列  $\langle a_n \rangle$  的前  $n$  項和為  $S_n = \frac{a_1(3^n - 1)}{2}$  且  $a_4 = 54$ ，則  $a_1 =$  \_\_\_\_\_。

**解答** 2

**解析**  $a_4 = S_4 - S_3 = \frac{a_1}{2} ((3^4 - 1) - (3^3 - 1)) = 27a_1 = 54 \Rightarrow a_1 = 2$ 。

26. 如圖是七個正方形  $S_1, S_2, \cdots, S_7$ ， $S_{k+1}$  內接於  $S_k$  且  $S_{k+1}$  的四個頂點正好是  $S_k$  四條邊的中點 ( $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ )，已知  $S_1$  的邊長為 4 公尺，則這七個正方形面積的總和 = \_\_\_\_\_。



**解答**  $\frac{127}{4}$

**解析**  $\frac{S_2}{S_1}$  邊長比 =  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , 面積比 =  $\frac{1}{2}$ , 所求面積和 =  $16 + 8 + \dots + \frac{1}{4} = \frac{16 \left[ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^7 \right]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{127}{4}$ .

27. 若兩等差數列  $\langle a_n \rangle$  與  $\langle b_n \rangle$  的前  $n$  項和之比為  $(4n+3) : (7n+2)$ , 求  $\frac{a_{11} + a_{25}}{b_{11} + b_{25}} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

**解答**  $\frac{11}{19}$

**解析** 設  $\langle a_n \rangle$  之公差  $d_1$ ,  $\langle b_n \rangle$  之公差  $d_2$

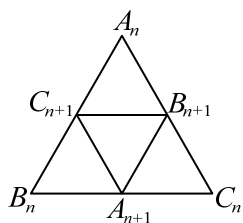
$$\langle a_n \rangle \text{ 前 } n \text{ 項和} = A_n = \frac{(2a_1 + (n-1)d_1) \times n}{2}, \langle b_n \rangle \text{ 前 } n \text{ 項和} = B_n = \frac{(2b_1 + (n-1)d_2) \times n}{2}$$

$$\frac{a_{11} + a_{25}}{b_{11} + b_{25}} = \frac{2a_1 + 34d_1}{2b_1 + 34d_2} = \frac{A_{35}}{B_{35}} = \frac{4 \times 35 + 3}{7 \times 35 + 2} = \frac{11}{19}.$$

28. 設  $\triangle A_1 B_1 C_1$  為一正三角形, 連結  $\triangle A_1 B_1 C_1$  各邊中點而得一正三角形  $A_2 B_2 C_2$ , 再連結  $\triangle A_2 B_2 C_2$  各邊中點而得一正三角形  $A_3 B_3 C_3$ , 若  $A_1 B_1 = 1$ , 試求此三個三角形的面積總和為  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

**解答**  $\frac{21\sqrt{3}}{64}$

**解析** 如圖, 因  $\overline{A_{n+1} B_{n+1}} = \frac{1}{2} \overline{A_n B_n}$ ,



$\therefore \triangle A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1}$  的面積為  $\triangle A_n B_n C_n$  之面積的  $\frac{1}{4}$  倍,

$$\text{而 } \triangle A_1 B_1 C_1 \text{ 的面積} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}, \therefore \text{全部面積總和為 } \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 - \frac{1}{4^3}\right)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{21\sqrt{3}}{64}.$$

29. 級數  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2-1}$  的和 = \_\_\_\_\_ . (用  $n$  表示)

**解答**  $\frac{n}{2n+1}$

**解析**  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2-1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$   
 $= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right] = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{2n}{2(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$  .

30. 曾瓊酸於年初向銀行借錢 66200 元，年利率 10%，每年複利計息一次。若曾瓊酸打算每年年底還一次，每次攤還金額相等，分三年還清，則每年年底應還 \_\_\_\_\_ 元。

**解答** 26620

**解析** 設每年應還  $x$  元，則  $x \times 1.1^2 + x \times 1.1 + x = 66200 \times 1.1^3 \Rightarrow 3.31x = 66200 \times 1.1^3 \Rightarrow x = 26620$

31. 求級數和  $\sum_{k=1}^n \left( \frac{2k}{3^k} + \frac{1}{3^n} \right) =$  \_\_\_\_\_ .

**解答**  $\frac{3}{2} \left( 1 - \frac{1}{3^n} \right)$

**解析**  $\sum_{k=1}^n \frac{2k}{3^k} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3^2} + \frac{6}{3^3} + \cdots + \frac{2n}{3^n}$

設  $S = \frac{2}{3} + \frac{4}{3^2} + \frac{6}{3^3} + \cdots + \frac{2n}{3^n}$

$-\frac{1}{3}S = \frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \cdots + \frac{2(n-1)}{3^n} + \frac{2n}{3^{n+1}}$

$\frac{2}{3}S = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots + \frac{2}{3^n} - \frac{2n}{3^{n+1}}$

$\frac{2}{3}S = \frac{\frac{2}{3} [1 - (\frac{1}{3})^n]}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{2n}{3^{n+1}} \Rightarrow S = \frac{3}{2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{3} \right)^n - \frac{2n}{3^{n+1}} \right] = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \left( \frac{1}{3} \right)^n - \frac{n}{3^n}$

又  $\sum_{k=1}^n \left( \frac{2k}{3^k} + \frac{1}{3^n} \right) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{2k}{3^k} \right) + \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{3^n} \right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \left( \frac{1}{3} \right)^n - \frac{n}{3^n} + \left( \frac{1}{3^n} \right) \times n = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \left( \frac{1}{3} \right)^n = \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{1}{3^n} \right)$  .

32. 求  $3^2 + 7^2 + 11^2 + 15^2 + \cdots + 35^2 + 39^2 =$  \_\_\_\_\_ .

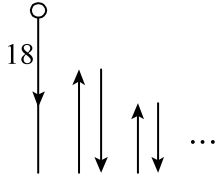
**解答** 5730

**解析**  $3^2 + 7^2 + 11^2 + \cdots + 39^2 = \sum_{k=1}^{10} (4k-1)^2 = \sum_{k=1}^{10} (16k^2 - 8k + 1) = 16 \sum_{k=1}^{10} k^2 - 8 \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 1 = 5730$  .

33. 有一球自 18 公尺的高處落下，每次落地後反彈的高度為原高度的  $\frac{2}{3}$ ，則此球自開始落下至第 4 次著地所經過的總路程是 \_\_\_\_\_ 公尺。

**解答**  $\frac{206}{3}$

**解析** 總路程 =  $18 + 2 \times \left( 18 \times \frac{2}{3} \right) + 2 \times 18 \times \left( \frac{2}{3} \right)^2 + 2 \times 18 \times \left( \frac{2}{3} \right)^3 = 18 + 24 + 16 + \frac{32}{3} = \frac{206}{3}$  (公尺) .



34. 計算  $\frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{2}{3}) + (\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}) + \dots + (\frac{1}{50} + \frac{2}{50} + \dots + \frac{49}{50}) = \underline{\hspace{2cm}}$  .

**解答**  $\frac{1225}{2}$

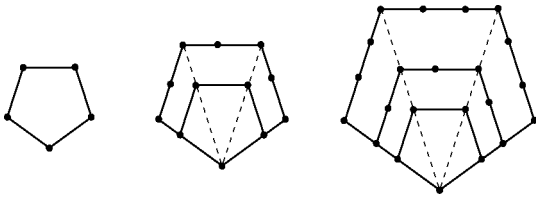
**解析** 所求 =  $\sum_{k=1}^{49} \frac{1+2+\dots+k}{k+1} = \sum_{k=1}^{49} \frac{k(k+1)}{2(k+1)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{49} k = \frac{1}{2} \times \frac{49 \times 50}{2} = \frac{1225}{2}$  .

35. 級數  $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (2n-1)^2 - (2n)^2$  的和為  $\underline{\hspace{2cm}}$  .

**解答**  $-2n^2 - n$

**解析**  $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (2n-1)^2 - (2n)^2 = \sum_{k=1}^n [(2k-1)^2 - (2k)^2]$   
 $= \sum_{k=1}^n (-4k+1) = -4 \times \frac{n(n+1)}{2} + n = -2n^2 - n$  .

36. 下圖中， $n=k$  表由內而外張得  $k$  個正五邊形，依此圖形的規律（第  $k$  個正五邊形每邊有  $k+1$  個圓點）， $n=20$  時，這 20 個正五邊形圖中，有  $\underline{\hspace{2cm}}$  個圓點 .



**解答** 651

**解析**  $n=0 \rightarrow n=1 \rightarrow n=2 \rightarrow n=3 \rightarrow n=4$   
 $1 \xrightarrow{+4} 5 \xrightarrow{+7} 12 \xrightarrow{+10} 22 \xrightarrow{+?} ?$   
            $\underbrace{\hspace{1cm}}_{+3}$      $\underbrace{\hspace{1cm}}_{+3}$      $\underbrace{\hspace{1cm}}_{+3}$

由前述規律知：所求 =  $1 + \{4 + 7 + 10 + \dots + [4 + 3 \times (20-1)]\} = 1 + \frac{20(2 \times 4 + 19 \times 3)}{2} = 651$  .