高雄市明誠中學 高一數學平時測驗					日期：102.01.02
範圍	3-3 對數(C)	班級	一年____班	姓名	
		座號			

一、填充題 (每題 10 分)

1.若 $f(x)=\log_3\log_{0.3}\log_9 x$，則使 $f(x)$有意義的所有實數 x 所成的集合(即 $f(x)$的定義域)= ____________.

解答 $\{x|\ 1<x<9,\ x\in\boldsymbol{R}\}$

解析 $f(x)=\log_3[\log_{0.3}(\log_9 x)]$有意義 $\Rightarrow \log_{0.3}(\log_9 x)>0=\log_{0.3}1\Rightarrow 0<\log_9 x<1$

$\Rightarrow \log_9 1<\log_9 x<\log_9 9\Rightarrow 1<x<9$

2.若 $\log_{x-1}(2x-x^2+3)$有意義，則 x 之範圍為____________ .

解答 $1<x<3$，但 $x\neq 2$

解析 $0<x-1\neq 1\Rightarrow 1<x\neq 2$……①

$2x-x^2+3>0\Rightarrow x^2-2x-3<0\Rightarrow -1<x<3$……②

由①②得 $1<x<3$，但 $x\neq 2$

3.若不論 x 為任何實數，$\log_{0.1}[(k-1)x^2+2x+(k+1)]$恆有意義，則實數 k 之範圍為____________ .

解答 $k>\sqrt{2}$

解析 原式 $\Rightarrow\ \forall x$，$(k-1)x^2+2x+(k+1)>0$

$k-1>0\Rightarrow k>1$……①

$\triangle<0\Rightarrow 1-(k-1)(k+1)<0\Rightarrow 1-(k^2-1)<0\Rightarrow k^2>2\Rightarrow k<-\sqrt{2}$ 或 $k>\sqrt{2}$ ……②

由①②得 $k>\sqrt{2}$

4.解不等式：(1) $\log_2(x-1)<1+\log_4(x+2)$之解為__________. (2) $\log_3(\log_{\frac{1}{2}}x)<1$ 之解為__________.

解答 (1) $1<x<7$;(2) $\frac{1}{8}<x<1$

解析 (1)∵ 原式有意義 $\Rightarrow \begin{cases}x-1>0\\x+2>0\end{cases}\Rightarrow x>1$……①

原式化為 $\log_2(x-1)<\log_2 2+\frac{1}{2}\log_2(x+2)\Rightarrow x-1<2\,(x+2)^{\frac{1}{2}}\ \Rightarrow (x-1)^2<4\,(x+2)$

$\Rightarrow x^2-6x-7<0\Rightarrow (x+1)(x-7)<0\Rightarrow -1<x<7$……②

由①②得 $1<x<7$

(2) $\log_3(\log_{\frac{1}{2}}x)<1\Rightarrow \log_3(\log_{\frac{1}{2}}x)<\log_3 3\Rightarrow 0<\log_{\frac{1}{2}}x<3$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}1<\log_{\frac{1}{2}}x<\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2})^3\quad\Rightarrow 1>x>\frac{1}{8}$$

5.解不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{\frac{1}{4}}(2x+1)$得____________ .

解答 $1<x<4$

解析 原式有意義 $\Rightarrow \begin{cases}x-1>0\\2x+1>0\end{cases}$ $\therefore\ x>1$……①

原式化為 $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{(\frac{1}{2})^2}(2x+1)\Rightarrow 2\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)$

$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x-1)^2>\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)\Rightarrow (x-1)^2<2x+1\Rightarrow x^2-4x<0\Rightarrow 0<x<4$……②

由①②得 $1<x<4$

6.設不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 x)>0$，則實數 x 解的範圍為____________．

解答 $1<x<3$

解析 $\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 x)>0$，$\begin{cases}\log_3 x>0\Rightarrow \log_3 x>\log_3 1\Rightarrow x>1\cdots\cdots①\\ \log_{\frac{1}{2}}(\log_3 x)>\log_{\frac{1}{2}}1\Rightarrow \log_3 x<\log_3 3\Rightarrow x<3\cdots\cdots②\end{cases}$，由①②知，$1<x<3$．

7.比較下列 a，b，c，d，e 的大小：

(1) $a=(1.7)^{3.1}$，$b=(1.7)^{-2}$，$c=1$，$d=0$，$e=\sqrt[3]{1.7}$ ：____________．

(2) $a=\log_{0.6}2$，$b=\log_{0.6}\sqrt{0.6}$，$c=\log_{0.6}0.5$，$d=0$，$e=1$：____________．

解答 (1) $a>e>c>b>d$;(2) $c>e>b>d>a$

解析 (1)$a=(1.7)^{3.1}$，$b=(1.7)^{-2}$，$c=1=(1.7)^0$，$d=0$，$e=(1.7)^{\frac{1}{3}}$

$\because\ 1.7>1\quad \therefore\ a>e>c>b>d$

(2)$a=\log_{0.6}2<\log_{0.6}1=0$，$b=\log_{0.6}\sqrt{0.6}=\dfrac{1}{2}$，$c=\log_{0.6}0.5>\log_{0.6}0.6=1$，$d=0$，$e=1$

$\therefore\ c>e>b>d>a$

8.不等式$(\log x)^2<\log x^2+3$ 之解為____________．

解答 $\dfrac{1}{10}<x<1000$

解析 設 $\log x=t\ \Rightarrow\ t^2-2t-3<0\ \Rightarrow\ (t-3)(t+1)<0\ \Rightarrow\ -1<t<3$

$\log\dfrac{1}{10}=-1<\log x<3=\log 1000\ \Rightarrow\ \dfrac{1}{10}<x<1000$

9.解 $\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{6}}(x^2-3x+2)<1$，得____________．

解答 $-1<x<1$ 或 $2<x<4$

解析 $\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{6}}(x^2-3x+2)<1\Rightarrow \log_6(x^2-3x+2)<1\Rightarrow 0<x^2-3x+2<6\Rightarrow \begin{cases}x^2-3x+2>0\\ x^2-3x-4<0\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}x<1 \text{ 或 } x>2\\ -1<x<4\end{cases}\Rightarrow -1<x<1$ 或 $2<x<4$

10.集合 $S=\{\log_{0.2}3，\log_{0.2}\dfrac{1}{10}，\log_3 0.2，\log_2 0.2，\log_{0.2}\dfrac{1}{6}\}$所有元素中最小者為____________．

解答 $\log_2 0.2$

解析 $\because\ \log_{0.2}\dfrac{1}{10}>0=\log_{0.2}1$，$\log_{0.2}\dfrac{1}{6}>0=\log_{0.2}1$，$\log_{0.2}3<0=\log_{0.2}1$，

$\log_3 0.2 < 0 = \log_{0.2} 1$，$\log_2 0.2 < 0 = \log_{0.2} 1$

欲求最小者，只要比較 $\log_{0.2}3$，$\log_3 0.2$，$\log_2 0.2$ 的大小

$\because\ \log_3 0.2 = \dfrac{1}{\log_{0.2} 3}$

又 $\log_{0.2}5 < \log_{0.2}3 < \log_{0.2}1 \Rightarrow -1 < \log_{0.2}3 < 0 \Rightarrow \log_3 0.2 < -1$

$\therefore\ \log_{0.2}3 > \log_3 0.2$

$\because\ \log_{0.2}3 < \log_{0.2}2 < 0 \Rightarrow \log_3 0.2 > \log_2 0.2$，即 $\log_{0.2}3 > \log_3 0.2 > \log_2 0.2$

11.滿足 $0 > \log_{\frac{1}{2}} \log_2 x > -2$ 的整數 x 共有____________個．

解答　13

解析　$0 > \log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x) > -2 \Rightarrow\ \log_{\frac{1}{2}} 1 > \log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x) > \log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2})^{-2} \Rightarrow 1 < \log_2 x < 4$

$\Rightarrow \log_2 2 < \log_2 x < \log_2 2^4 \Rightarrow 2 < x < 16$

$\therefore\ x = 3$，4，5，6，……，15 共有 13 個整數值

12.對任意實數 x，$\log_{0.9}(2x^2 - 3x + k)$之值恆為負，則實數 k 的範圍是____________．

解答　$k > \dfrac{17}{8}$

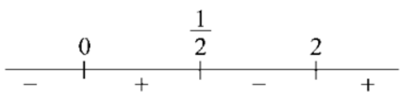
解析　$\log_{0.9}(2x^2 - 3x + k) < 0 = \log_{0.9} 1 \ \Rightarrow\ 2x^2 - 3x + k > 1 \ \Rightarrow\ 2x^2 - 3x + k - 1 > 0$

$(-3)^2 - 4\cdot 2\cdot(k-1) < 0 \ \Rightarrow\ 9 - 8k + 8 < 0 \ \Rightarrow\ k > \dfrac{17}{8}$

13.設 $\log_2 x + \log_x 2 < \dfrac{5}{2}$，則 x 的範圍是____________．

解答　$0 < x < 1$ 或 $\sqrt{2} < x < 4$

解析　$\log_2 x + \dfrac{1}{\log_2 x} - \dfrac{5}{2} < 0 \Rightarrow \dfrac{2(\log_2 x)^2 - 5\log_2 x + 2}{2\log_2 x} < 0 \Rightarrow 2\log_2 x(2\log_2 x - 1)(\log_2 x - 2) < 0$



$\therefore\ \log_2 x < 0$ 或 $\dfrac{1}{2} < \log_2 x < 2$，即 $0 < x < 1$ 或 $\sqrt{2} < x < 4$

14.設 $\dfrac{1}{4} \le x \le 8$，$f(x) = x^{2-\log_2 x}$ 之最大值為____________．

解答　2

解析　$f(x) = x^{2-\log_2 x} \ \Rightarrow \log_2 f(x) = \log_2 x^{2-\log_2 x} = (2 - \log_2 x)\log_2 x$

設 $\log_2 x = t \Rightarrow \log_2 f(x) = (2 - t)t = -(t-1)^2 + 1$

$\because\ \dfrac{1}{4} \le x \le 8 \Rightarrow -2 \le \log_2 x \le 3 \Rightarrow -2 \le t \le 3$

$\therefore$ 當 $t = 1$ 時，$\log_2 f(x)$有最大值$= 1 \Rightarrow f(x)$之最大值$= 2$

15.不等式 $\log_x(2x^2 + 4x) > \log_x(2 + x)$ 的解為____________．

解答 $0 < x < \frac{1}{2}$ 或 $x>1$

解析 $\log_x(2x^2+4x) > \log_x(2+x)$

當 $x>1$ 時，$2x^2+4x>2+x \Rightarrow 2x^2+3x-2>0 \Rightarrow x>\frac{1}{2}$ 或 $x<-2$ $\therefore$ $x>1$……①

當 $0<x<1$ 時，$2x^2+4x<2+x \Rightarrow -2<x<\frac{1}{2}$ $\therefore$ $0<x<\frac{1}{2}$……②

由①②知 $0<x<\frac{1}{2}$ 或 $x>1$

16.設 $f(x) = \log_4 x + \log_4(16-x)$於 $x = a$ 時的最大值為 b，則數對$(a，b)$ = ____________ .

解答 (8，3)

解析 $\begin{cases} x>0 \\ 16-x>0 \end{cases}$，$\therefore$ $0<x<16$，

$f(x) = \log_4 x + \log_4(16-x) = \log_4 x(16-x) = \log_4(-x^2+16x) = \log_4[-(x-8)^2+64]$，

$\therefore$ 當 $x = 8$ 時，$f(x)$有最大值$= \log_4 64 = 3$，即$(a，b) = (8，3)$.

17.$y = \log_3 \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$，則 y 的範圍為____________ .

解答 $-1 \le y \le 1$

解析 設 $t = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$，

$\therefore$ $tx^2+tx+t = x^2-x+1 \Rightarrow (t-1)x^2+(t+1)x+(t-1)=0$，$\because$ $x \in \boldsymbol{R}$，$\therefore$ $D \ge 0$

$\Rightarrow (t+1)^2 - 4(t-1)(t-1) \ge 0 \Rightarrow -3t^2+10t-3 \ge 0 \Rightarrow (3t-1)(t-3) \le 0$，$\therefore$ $\frac{1}{3} \le t \le 3$

$\Rightarrow$ $\log_3 \frac{1}{3} \le \log_3 t \le \log_3 3 \Rightarrow -1 \le y \le 1$.

18.函數 $f(x) = 2(\log_2 2x)^2 + \log_2(2x)^2 + 2\log_2 x + 2$，(1)當 x =_________時，(2)$f(x)$有最小值= _________ .

解答 (1)$\frac{1}{4}$;(2)-2

解析 $f(x) = 2(\log_2 2 + \log_2 x)^2 + 2\log_2 2x + 2\log_2 x + 2 = 2(1+\log_2 x)^2 + 2(1+\log_2 x) + 2\log_2 x + 2$，

設 $t = \log_2 x \Rightarrow f(x) = 2(1+t)^2 + 2(1+t) + 2t + 2 = 2t^2 + 8t + 6 = 2(t+2)^2 - 2$，

$\therefore$ 當 $t = -2$ 時，$f(x)$有最小值$= -2$，此時 $\log_2 x = -2$，$\therefore$ $x = 2^{-2} = \frac{1}{4}$.

19.有研究機構想將世界各國依照其面積大小為等級的標準，下表所列的 6 個國家的面積（單位：千平方公里）．且以冰島為基準，用對數函數 $f(x)$ 來計算各國的面積等級

$$f(A) = 5\log(\frac{A}{A_0})，$$

其中 A_0 是冰島面積，A 是該國面積 .

國家	面積
冰島	103
德國	357
埃及	1001
澳洲	7687
美國	9827
俄羅斯	17075

試問面積等級大於 10 的國家有____________個．

解答 1

解析 設等級為 10 的國家，其面積 A，$10=5\log(\frac{A}{103})$，得 $\frac{A}{103}=10^2$，知 $A=10300$，

因面積大於 10300 的國家只有俄羅斯．

20.$(\log_2 9+\log_4 3)(\log_3 8+\log_9\frac{1}{4})$之值= ____________ ．

解答 5

解析 原式= $(\log_2 3^2+\log_{2^2}3)(\log_3 2^3+\log_{3^2}2^{-2})=(2\log_2 3+\frac{1}{2}\log_2 3)(3\log_3 2+\frac{-2}{2}\log_3 2)$

$=(\frac{5}{2}\log_2 3)(2\log_3 2)=\frac{5}{2}\cdot 2\cdot(\log_2 3\cdot\log_3 2)=5$

21.方程式 $\log_2(x-1)=\log_4(2-x)+1$ 之解為____________ ．

解答 $-1+2\sqrt{2}$

解析 $\because \begin{cases}2-x>0\\ x-1>0\end{cases} \Rightarrow 1<x<2$

原式化為 $\log_4(x-1)^2=\log_4(2-x)+\log_4 4$

$\Rightarrow (x-1)^2=4(2-x)\Rightarrow x^2+2x-7=0\Rightarrow x=-1\pm 2\sqrt{2}$　　但 $1<x<2$　$\therefore\ x=-1+2\sqrt{2}$

22.設 $\log_4 x=-\frac{3}{2}$， $\log_y\frac{16}{81}=\frac{4}{3}$，則(1) $x=$ ____________ ．　(2) $y=$ ____________ ．

解答 (1)$\frac{1}{8}$;(2)$\frac{8}{27}$

解析 (1) $\log_4 x=-\frac{3}{2}\ \Rightarrow x=4^{-\frac{3}{2}}=2^{-3}=\frac{1}{8}$

(2) $\log_y\frac{16}{81}=\frac{4}{3}\ \Rightarrow\ \frac{16}{81}=y^{\frac{4}{3}}\ \Rightarrow (\frac{2}{3})^4=y^{\frac{4}{3}}\ \Rightarrow y^{\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\ \Rightarrow y=(\frac{2}{3})^3=\frac{8}{27}$

23.設 $a=\log_2 3$，$b=\log_3 11$，以 a，b 表示下列式子之值： $\log_{66}18=$ ____________ ．

解答 $\frac{1+2a}{1+a+ab}$

解析 $a=\log_2 3$，$b=\log_3 11$，$ab=\log_2 3\cdot\log_3 11=\log_2 11$

(2) $\log_{66}18=\frac{\log_2 18}{\log_2 66}=\frac{\log_2(2\times 3^2)}{\log_2(2\times 3\times 11)}=\frac{1+2\log_2 3}{1+\log_2 3+\log_2 11}=\frac{1+2a}{1+a+ab}$

24.$\log_2(\log_2 32+\log_{\frac{1}{2}}\frac{3}{4}+\log_4 36)=$ ____________ ．

解答 3

解析 原式= $\log_2(\log_2 2^5+\log_{2^{-1}}\frac{3}{4}+\log_{2^2}6^2)=\log_2(5-\log_2\frac{3}{4}+\log_2 6)$

$=\log_2(5+\log_2\frac{6}{\frac{3}{4}})=\log_2(5+3)=3$

25.設 $4^{\log x}-3\cdot x^{\log 2}-4=0$，則 $x=$ ____________ .

解答 100

解析 $(2^{\log x})^2-3\cdot 2^{\log x}-4=0\Rightarrow(2^{\log x}-4)(2^{\log x}+1)=0\Rightarrow 2^{\log x}=4=2^2\Rightarrow\log x=2\quad\therefore\ x=100$

26.化簡 $\log_{\sqrt{2}}\dfrac{1}{2}+\log_2\dfrac{4\sqrt{3}}{3}-\log_4\dfrac{1}{6}=$ ____________ .

解答 $\dfrac{1}{2}$

解析 原式$=2\log_2\dfrac{1}{2}+\log_2\dfrac{4\sqrt{3}}{3}-\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{1}{6}=\log_2[(\dfrac{1}{2})^2\times\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{6}]=\log_2\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}$

27.解 $\begin{cases}\log_x 4-\log_y 2=2\\ \log_x 16+\log_y 8=-1\end{cases}$，得(1) $x=$ ____________，(2) $y=$ ____________ .

解答 (1)4;(2)$\dfrac{1}{2}$

解析 $\begin{cases}2\log_x 2-\log_y 2=2\cdots\cdots①\\ 4\log_x 2+3\log_y 2=-1\cdots\cdots②\end{cases}$ $①\times3+②\ \Rightarrow\ 10\log_x 2=5$

$\Rightarrow\ \log_x 2=\dfrac{1}{2}$, $x^{\frac{1}{2}}=2\ \Rightarrow\ x=4$, $y=\dfrac{1}{2}$

28.方程式$(8x)^{\log_2 x}=4x^2$之解為____________ .

解答 2 或$\dfrac{1}{4}$

解析 原式取對數 $\Rightarrow\log_2(8x)^{\log_2 x}=\log_2(4x^2)\Rightarrow\log_2 x\,(3+\log_2 x)=2+2\log_2 x$

$(\log_2 x)^2+\log_2 x-2=0\Rightarrow(\log_2 x+2)(\log_2 x-1)=0$

$\Rightarrow\log_2 x=-2$ 或 1　即 $x=2^{-2}=\dfrac{1}{4}$ 或 $2^1=2$

29.若 α，β 為$(\log x)^2-\log x^2-6=0$之兩根，則 $\log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha$ 之值為____________ .

解答 $-\dfrac{8}{3}$

解析 設 $t=\log x$，得 $t^2-2t-6=0$ 之兩根為 $\log\alpha$，$\log\beta\ \Rightarrow\ \log\alpha+\log\beta=2$，$(\log\alpha)(\log\beta)=-6$

$\therefore\ \log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha=\dfrac{\log\beta}{\log\alpha}+\dfrac{\log\alpha}{\log\beta}=\dfrac{(\log\alpha+\log\beta)^2-2(\log\alpha)(\log\beta)}{(\log\alpha)(\log\beta)}=\dfrac{4-2\times(-6)}{-6}=-\dfrac{8}{3}$

30.二次方程式 $2x^2-5x+1=0$ 的二根為 $\log a$，$\log b$，則 $\log_a b+\log_b a$ 值為____________ .

解答 $\dfrac{21}{2}$

解析 $\log a$ 與 $\log b$ 為 $2x^2-5x+1=0$ 之二根　$\therefore$ $\begin{cases}\log a+\log b=\dfrac{5}{2}\\ \log a\log b=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

則 $\log_a b+\log_b a=\dfrac{\log b}{\log a}+\dfrac{\log a}{\log b}=\dfrac{(\log a)^2+(\log b)^2}{\log a\log b}$

$$=\frac{(\log a+\log b)^2-2\log a\log b}{\log a\log b}=\frac{(\frac{5}{2})^2-2\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{21}{2}$$

31.方程式 $\log_{\frac{1}{2}}(x+3)-2\log_{\frac{1}{2}}(x-1)=1$ 之解為____________ .

解答 $x=5$

解析 (1)原式有意義 $\Rightarrow \begin{cases}x+3>0\\x-1>0\end{cases}\Rightarrow x>1$

(2)$\log_{\frac{1}{2}}(x+3)-2\log_{\frac{1}{2}}(x-1)=1\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x+3}{(x-1)^2}=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2}\ \Rightarrow\ \dfrac{x+3}{(x-1)^2}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow x^2-2x+1=2x+6\Rightarrow x^2-4x-5=0\Rightarrow x=5$ 或 -1

由(1)，(2)得 $x=5$

32.設方程式 $3^x-3^{-x}=2$ 的解為 $x=\log_9 k$，則 $k=$____________ .

解答 $3+2\sqrt{2}$

解析 $3^x-3^{-x}=2\Rightarrow 3^x-\dfrac{1}{3^x}=2\Rightarrow 3^{2x}-2\times 3^x-1=0$，

設 $t=3^x>0\Rightarrow t^2-2t-1=0$，$\therefore\ t=1\pm\sqrt{2}$（負不合）

$\Rightarrow 3^x=1+\sqrt{2}$，$\therefore\ x=\log_3(1+\sqrt{2})=\log_9(1+\sqrt{2})^2=\log_9(3+2\sqrt{2})$，$\therefore\ k=3+2\sqrt{2}$.

33.若 $2\log_2 x+6\log_x 2-7=0$，則 $x=$____________ .

解答 4 或 $2\sqrt{2}$

解析 設 $\log_2 x=t\Rightarrow\log_x 2=\dfrac{1}{t}$

原式 $\Rightarrow 2t+\dfrac{6}{t}-7=0\Rightarrow 2t^2-7t+6=0\Rightarrow(2t-3)(t-2)=0$，$\therefore\ t=\dfrac{3}{2}$ 或 2

$\Rightarrow\log_2 x=\dfrac{3}{2}$ 或 2，$\therefore\ x=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$ 或 $x=2^2=4$.

33.若 $n!=1\times2\times3\times\cdots\times n$，則 $\dfrac{1}{\log_2 50!}+\dfrac{1}{\log_3 50!}+\cdots+\dfrac{1}{\log_{50}50!}=$____________ .

解答 1

解析 所求$=\log_{50!}2+\log_{50!}3+\cdots+\log_{50!}50=\log_{50!}(2\times3\times\cdots\times50)$

$=\log_{50!}(1\times2\times3\times\cdots\times50)=\log_{50!}50!=1$.

34.設實數 x 滿足 $0<x<1$，且 $\log_x 4-\log_2 x=1$，則 $x=$____________ .（化成最簡分數）

解答 $\dfrac{1}{4}$

解析 設 $t=\log_x 2$，由 $\log_x 4-\log_2 x=1\ \Rightarrow\log_x 2^2-\dfrac{1}{\log_x 2}=1\Rightarrow 2\log_x 2-\dfrac{1}{\log_x 2}=1\Rightarrow 2t-\dfrac{1}{t}=1$

$\Rightarrow 2t^2-t-1=0\Rightarrow(2t+1)(t-1)=0\Rightarrow t=-\dfrac{1}{2}$ 或 1 $\Rightarrow\log_x 2=-\dfrac{1}{2}$ 或 1 $\Rightarrow x=\dfrac{1}{4}$ 或 2，

但 $0<x<1$，故 $x=\dfrac{1}{4}$ ．

35. $\log_2(\log_2\sqrt{2})$ 之值為____________．

解答　-1

解析　$\log_2(\log_2\sqrt{2})=\log_2(\log_2 2^{\frac{1}{2}})=\log_2\dfrac{1}{2}=-1$ ．

36. <u>小建</u>與<u>小國</u>同解 x 的方程式 $\log_2 x+a\log_x 2=b$，<u>小建</u>只看錯 a 而得兩根為 4，$\dfrac{1}{2}$；<u>小國</u>只看錯 b 而得兩根為 64，$\dfrac{1}{2}$ ．若兩人無其他計算錯誤，則原方程式的兩根為____________．

解答　8 或 $\dfrac{1}{4}$

解析　<u>小建</u>：$\begin{cases}\log_2 4+a\cdot\log_4 2=b\\ \log_2\dfrac{1}{2}+a\cdot\log_{\frac{1}{2}}2=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2+\dfrac{1}{2}a=b\\ -1-a=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\ b=1\end{cases}$（$b$ 正確），

<u>小國</u>：$\begin{cases}\log_2 64+a\cdot\log_{64} 2=b\\ \log_2\dfrac{1}{2}+a\cdot\log_{\frac{1}{2}}2=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6+\dfrac{1}{6}a=b\\ -1-a=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-6\\ b=5\end{cases}$（$a$ 正確）

$\Rightarrow$ 解 $\log_2 x-6\log_x 2=1$，令 $\log_2 x=t$， $t-\dfrac{6}{t}=1\Rightarrow t^2-t-6=0$

$\Rightarrow(t-3)(t+2)=0\Rightarrow t=3$ 或 $t=-2\Rightarrow\log_2 x=3$ 或 $\log_2 x=-2\Rightarrow x=8$ 或 $\dfrac{1}{4}$ ．

37. x 的方程式 $x^{(\log_2 x)-a}=32$ 有一根為 $\dfrac{1}{2}$，則：(1) $a=$____________　(2)此方程式的另一根為____________．

解答　(1)4　(2)32

解析　(1) $\dfrac{1}{2}$ 代入方程式得 $(\dfrac{1}{2})^{(\log_2\frac{1}{2})-a}=32\quad\Rightarrow(\dfrac{1}{2})^{-1-a}=2^5\Rightarrow 2^{1+a}=2^5\Rightarrow 1+a=5\Rightarrow a=4$ ．

(2) $x^{(\log_2 x)-4}=32\Rightarrow\log_2 x^{\log_2 x-4}=\log_2 32$

$\Rightarrow(\log_2 x-4)\log_2 x=5\Rightarrow(\log_2 x)^2-4\log_2 x-5=0$

$\Rightarrow(\log_2 x-5)(\log_2 x+1)=0\Rightarrow\log_2 x=5$ 或 $\log_2 x=-1\quad\Rightarrow x=32$ 或 $x=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore$ 另一根為 32．