高雄市明誠中學 高一數學平時測驗					日期：101.12.26
範圍	3-2 對數(B)	班級	一年____班	姓名	
		座號			

一、填充題 (每題 10 分)

1.$3^{\frac{2\log_2 5}{\log_2 3}}+5^{\log_{\sqrt{2}} 4}=$____________．

解答 650

解析 原式$=3^{\log_3 5^2}+5^{\log_2 16}=25+5^4=650$

2.$\dfrac{\log 1.2}{\log 8+\log\sqrt{27}-\log\sqrt{1000}}=$____________．

解答 $\dfrac{2}{3}$

解析 原式$=\dfrac{\log\frac{12}{10}}{\log\frac{2^3\cdot 3^{\frac{3}{2}}}{10^{\frac{3}{2}}}}=\dfrac{\log\frac{2^2\cdot 3}{10}}{\log(\frac{2^2\cdot 3}{10})^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{\log\frac{2^2\cdot 3}{10}}{\frac{3}{2}\log\frac{2^2\cdot 3}{10}}=\dfrac{2}{3}$

3.解 $x^{\log x}=\dfrac{x^2}{10}$，得 $x=$____________．

解答 10

解析 原式取 log $\Rightarrow \log x^{\log x}=\log\dfrac{x^2}{10}$ $\Rightarrow (\log x)^2=2\log x-1$

$\Rightarrow (\log x)^2-2\log x+1=0 \Rightarrow (\log x-1)^2=0 \Rightarrow \log x=1 \Rightarrow x=10$

4.二次方程式 $2x^2-5x+1=0$ 的二根為 $\log a$，$\log b$，則 $\log_a b+\log_b a$ 值為____________．

解答 $\dfrac{21}{2}$

解析 $\log a$ 與 $\log b$ 為 $2x^2-5x+1=0$ 之二根 ∴ $\begin{cases}\log a+\log b=\dfrac{5}{2}\\ \log a\log b=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

則 $\log_a b+\log_b a=\dfrac{\log b}{\log a}+\dfrac{\log a}{\log b}=\dfrac{(\log a)^2+(\log b)^2}{\log a\log b}$

$=\dfrac{(\log a+\log b)^2-2\log a\log b}{\log a\log b}=\dfrac{(\frac{5}{2})^2-2\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{21}{2}$

5.求值：$\log_3\dfrac{1}{3\sqrt{3}}+(\dfrac{\log 8}{\log 3}-\dfrac{1}{\log_2 3})\cdot\log_2\sqrt{3}=$____________．

解答 $-\frac{1}{2}$

解析 原式$=\log_3\frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}+(\frac{3\log 2}{\log 3}-\frac{1}{\log_2 3})\cdot\log_2 3^{\frac{1}{2}}=\log_3 3^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}(3\log_3 2-\frac{1}{\log_2 3})\cdot\log_2 3$

$$=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(3-1)=-\frac{3}{2}+1=-\frac{1}{2}$$

6.設 $\log 1.4=a$，$\log 3.5=b$，試以 a，b 表示 $\log 28=$____________ .

解答 $\frac{3a-b+3}{2}$

解析 $\begin{cases} a=\log 1.4=\log(\frac{2\times 7}{10})=\log 2+\log 7-1 \\ b=\log 3.5=\log(\frac{7}{2})=\log 7-\log 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log 7+\log 2=a+1 \\ \log 7-\log 2=b \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} \log 2=\frac{1}{2}(a-b+1) \\ \log 7=\frac{1}{2}(a+b+1) \end{cases}$

$$\log 28=\log(2^2\times 7)=2\log 2+\log 7=2\times\frac{1}{2}(a-b+1)+\frac{1}{2}(a+b+1)=\frac{1}{2}(3a-b+3)$$

7.設 $57^x=8$，$513^y=16$，則 $\frac{3}{x}-\frac{4}{y}=$__________ .

解答 $-2\log_2 3$

解析 $57^x=8=2^3 \Rightarrow 57=2^{\frac{3}{x}}$……①，$513^y=16=2^4 \Rightarrow 513=2^{\frac{4}{y}}$……②

$\frac{①}{②}$ 得 $2^{\frac{3}{x}-\frac{4}{y}}=\frac{57}{513}=\frac{1}{9}$　$\therefore$ $\frac{3}{x}-\frac{4}{y}=\log_2\frac{1}{9}=\log_2 3^{-2}=-2\log_2 3$

8.若 $\log 3=a$，$\log 2=b$，則 $10^{a-2b+1}=$____________ .

解答 $\frac{15}{2}$

解析 $\log 3=a$，$\therefore$ $10^a=3$，$\log 2=b$，$\therefore$ $10^b=2$，

$\Rightarrow$ 所求$=10^a\times(10^b)^{-2}\times 10=3\times 2^{-2}\times 10=\frac{15}{2}$.

9.方程式 $\log_x 9-\log_3 x=1$ 之所有根的和為____________ .

解答 $\frac{28}{9}$

解析 令 $\log_3 x=t$，$\therefore$ $\log_x 3=\frac{1}{t}$，

原式 $\Rightarrow 2\log_x 3-\log_3 x=1 \Rightarrow 2\times\frac{1}{t}-t=1 \Rightarrow t^2+t-2=0 \Rightarrow (t+2)(t-1)=0$

$\Rightarrow t=-2$ 或 1，$\therefore$ $x=3^{-2}=\frac{1}{9}$ 或 $x=3^1=3 \Rightarrow$ 二根之和$=\frac{1}{9}+3=\frac{28}{9}$.

10.設 $a=\log\frac{8}{25}$，$b=\log 12$，$\log 15=xa+yb+z$，其中 x，y，z 為有理數，則 $x-y+z=$____________ .

解答　$-\dfrac{9}{5}$

解析　$a=\log\dfrac{8}{25}=3\log2-2\log5=3\log2-2(1-\log2)=5\log2-2$……①，

$b=\log12=2\log2+\log3$……②，

由①得 $\log2=\dfrac{a+2}{5}$ 代入②，∴ $\log3=b-2\log2=b-\dfrac{2a+4}{5}$

$\Rightarrow \log15=\log3+\log5=\log3+(1-\log2)=(b-\dfrac{2a+4}{5})+(1-\dfrac{a+2}{5})=-\dfrac{3}{5}a+b-\dfrac{1}{5}$，

∴ $x=-\dfrac{3}{5}$，$y=1$，$z=-\dfrac{1}{5}$ $\Rightarrow x-y+z=-\dfrac{9}{5}$.

11.設 $\log_2(\log_3(\log_4x))=\log_3(\log_4(\log_2y))=\log_4(\log_2(\log_3z))=0$，則 $x-y+z=$____________ .

解答　57

解析　由已知 $\Rightarrow \log_3(\log_4x)=\log_4(\log_2y)=\log_2(\log_3z)=1\Rightarrow \log_4x=3$，$\log_2y=4$，$\log_3z=2$

$\Rightarrow x=4^3=64$，$y=2^4=16$，$z=3^2=9\Rightarrow x-y+z=64-16+9=57$.

12.設方程式 $3^x-3^{-x}=2$ 的解為 $x=\log_9k$，則 $k=$____________ .

解答　$3+2\sqrt{2}$

解析　$3^x-3^{-x}=2\Rightarrow 3^x-\dfrac{1}{3^x}=2\Rightarrow 3^{2x}-2\times3^x-1=0$，

令 $t=3^x>0\Rightarrow t^2-2t-1=0$，∴ $t=1\pm\sqrt{2}$（負不合）

$\Rightarrow 3^x=1+\sqrt{2}$，∴ $x=\log_3(1+\sqrt{2})=\log_9(1+\sqrt{2})^2=\log_9(3+2\sqrt{2})$，∴ $k=3+2\sqrt{2}$.

13.解 $\log_6x+\log_6(x^2-7)=1$，得 $x=$____________ .

解答　3

解析　$\begin{cases}x>0\\x^2-7>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\x>\sqrt{7}\text{ 或 }x<-\sqrt{7}\end{cases}$，∴ $x>\sqrt{7}$，

原式 $\Rightarrow \log_6x(x^2-7)=\log_66\Rightarrow x(x^2-7)=6\Rightarrow x^3-7x-6=0\Rightarrow (x+1)(x+2)(x-3)=0$

$\Rightarrow x=-1$，-2 或 3，但 $x>\sqrt{7}$，∴ $x=3$.

14.解 $\log_2(x-1)-\log_4(x^2-x-4)=\dfrac{1}{2}$，得 $x=$____________ .

解答　3

解析　原式 $\Rightarrow \log_4(x-1)^2-\log_4(x^2-x-4)=\log_4 4^{\frac{1}{2}}\Rightarrow \log_4\dfrac{(x-1)^2}{x^2-x-4}=\log_4\sqrt{4}=\log_42$

$\Rightarrow \dfrac{(x-1)^2}{x^2-x-4}=2$，∴$(x-1)^2=2(x^2-x-4)\Rightarrow x^2=9$，∴ $x=\pm3$（負不合）$\Rightarrow x=3$.

15.若 $2\log_2x+6\log_x2-7=0$，則 $x=$____________ .

解答　4 或 $2\sqrt{2}$

解析　令 $\log_2x=t\Rightarrow \log_x2=\dfrac{1}{t}$

原式 $\Rightarrow 2t+\dfrac{6}{t}-7=0\Rightarrow 2t^2-7t+6=0\Rightarrow (2t-3)(t-2)=0$，∴ $t=\dfrac{3}{2}$ 或 2

$\Rightarrow \log_2 x=\frac{3}{2}$ 或 2，∴ $x=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$ 或 $x=2^2=4$．

16.若 $3^{\log x}\cdot x^{\log 3}-2(3^{\log x}+x^{\log 3})-45=0$，則 $x=$____________．

解答　100

解析　令 $3^{\log x}=t\Rightarrow x^{\log 3}=t$，∴ $t>0$，

原式 $\Rightarrow t\times t-2(t+t)-45=0\Rightarrow t^2-4t-45=0\Rightarrow (t-9)(t+5)=0$，

∴ $t=9$ 或-5（不合）$\Rightarrow 3^{\log x}=9=3^2$，∴ $\log x=2$，∴$x=100$．

17.若 $x^{1+\log_3 x}=27x^3$，則 $x=$____________．

解答　27 或$\frac{1}{3}$

解析　兩邊同取 $\log_3\Rightarrow \log_3 x^{1+\log_3 x}=\log_3(27x^3)\Rightarrow (1+\log_3 x)\log_3 x=\log_3 27+\log_3 x^3=3+3\log_3 x$，

設 $t=\log_3 x$，∴ $(1+t)t=3+3t\Rightarrow t^2-2t-3=0\Rightarrow (t+1)(t-3)=0\Rightarrow t=-1$ 或 3

$\Rightarrow \log_3 x=-1$ 或 3，∴$x=\frac{1}{3}$或 27．

18.方程式 $x^2+(2\log 5)x+\log\frac{5}{2}=0$ 之解為____________．

解答　$-1+2\log 2$ 或-1

解析　原式 $\Rightarrow x^2+(2\log 5)x+(\log 5-\log 2)=0\Rightarrow x^2+2(1-\log 2)x+(1-2\log 2)=0$，

設 $\log 2=a\Rightarrow x^2+2(1-a)x+(1-2a)=0\Rightarrow [x+(1-2a)][x+1]=0$

$\Rightarrow x=-(1-2a)=-1+2\log 2$ 或 $x=-1$．

19.設方程式$(\log 3x)(\log 7x)=2$ 的二根為 α，β，則 $\alpha\beta=$____________．

解答　$\frac{1}{21}$

解析　原式 $\Rightarrow (\log 3+\log x)(\log 7+\log x)=2\Rightarrow(\log x)^2+(\log 3+\log 7)\log x+\log 3\times\log 7-2=0$

$\Rightarrow (\log x)^2+\log 21\times\log x+\log 3\log 7-2=0$，

設 $t=\log x$，∵ α，β 為 x 的二根，∴ t 的二根為 $\log\alpha$，$\log\beta$，

又 $t^2+(\log 21)t+\log 3\log 7-2=0$，

由 t 的二根之和：$\log\alpha+\log\beta=-(\log 21)\Rightarrow \log\alpha\beta=\log 21^{-1}$，∴ $\alpha\beta=21^{-1}=\frac{1}{21}$．

20.已知$(\log 3x)(\log ax)=1$ 之二根乘積為$\frac{1}{18}$，則 $a=$____________．

解答　6

解析　原式 $\Rightarrow (\log 3+\log x)(\log a+\log x)=1\Rightarrow (\log x)^2+(\log 3+\log a)\log x+\log 3\log a-1=0$，

設 $t=\log x\Rightarrow t^2+(\log 3a)t+\log 3\log a-1=0$，設 α，β 為 x 的二根，

∴ t 的二根為 $\log\alpha$，$\log\beta\Rightarrow \log\alpha+\log\beta=-\log 3a$，∴ $\log\alpha\beta=\log\frac{1}{3a}$

$\Rightarrow \alpha\beta=\frac{1}{3a}=\frac{1}{18}$，∴ $a=6$．

21.若 $\log_a x=\log_b y=-\frac{1}{2}\log_c 2$, a, b, $c>0$ 且 a, b, c 均不為 1, 又 $x>0$, $y>0$, $c=\sqrt{ab}$, 則 $xy=$_______．

解答　$\frac{1}{2}$

解析　設 $\log_a x = \log_b y = -\frac{1}{2}\log_c 2 = k \Rightarrow x = a^k$，$y = b^k$，$2^{-\frac{1}{2}} = c^k$，

$\therefore xy = a^k \times b^k = (ab)^k = (c^2)^k = (c^k)^2 = (2^{-\frac{1}{2}})^2 = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ ．

22.求 $\begin{cases} \frac{\log x}{1} = \frac{\log y}{-2} = \frac{\log z}{3} \\ xyz = 100 \end{cases}$ 之解$(x，y，z)$ = ____________ ．

解答　$(10，\frac{1}{100}，1000)$

解析　設 $\frac{\log x}{1} = \frac{\log y}{-2} = \frac{\log z}{3} = k \Rightarrow \log x = k$，$\log y = -2k$，$\log z = 3k$，$\because xyz = 100$，

$\therefore \log xyz = \log 100 \Rightarrow \log x + \log y + \log z = 2$，$\therefore k - 2k + 3k = 2$，$\therefore k = 1$

$\Rightarrow \log x = 1$，$\log y = -2$，$\log z = 3 \Rightarrow x = 10$，$y = 10^{-2} = \frac{1}{100}$，$z = 10^3 = 1000$，

即$(x，y，z) = (10，\frac{1}{100}，1000)$ ．

23.$\log_{10}x + a\log_x 10 = b$，甲看錯 a，解得兩根為 100，100，乙看錯 b，解得兩根為 100 及$\sqrt{1000}$，則正確之解為_________ ．

解答　10 或 1000

解析　原式 $\Rightarrow \log_{10}x + \frac{a}{\log_{10}x} = b \Rightarrow (\log_{10}x)^2 - b \times \log_{10}x + a = 0$，

甲看錯 a，得二根為 100，100 $\Rightarrow b$ 正確，$\therefore \log_{10}100 + \log_{10}100 = b$，$\therefore 2 + 2 = b \Rightarrow b = 4$，

乙看錯 b，得二根 100，$\sqrt{1000} \Rightarrow a$ 正確，$\log_{10}100 \times \log_{10}\sqrt{1000} = a$，$2 \times \frac{3}{2} = a \Rightarrow a = 3$，

即原式為$(\log_{10}x)^2 - 4\log_{10}x + 3 = 0 \Rightarrow (\log_{10}x - 1)(\log_{10}x - 3) = 0 \Rightarrow \log_{10}x = 1$ 或 3，

$\therefore x = 10$ 或 1000 ．

24.設實數 x 滿足 $0 < x < 1$，且 $\log_x 4 - \log_2 x = 1$，則 x＝___________ ．（化成最簡分數）

解答　$\frac{1}{4}$

解析　設 $t = \log_x 2$，

由 $\log_x 4 - \log_2 x = 1 \Rightarrow \log_x 2^2 - \frac{1}{\log_x 2} = 1 \Rightarrow 2\log_x 2 - \frac{1}{\log_x 2} = 1 \Rightarrow 2t - \frac{1}{t} = 1$

$\Rightarrow 2t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow (2t+1)(t-1) = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$ 或 1 $\Rightarrow \log_x 2 = -\frac{1}{2}$ 或 1 $\Rightarrow x = \frac{1}{4}$ 或 2，

但 $0 < x < 1$，故 $x = \frac{1}{4}$ ．

25. $\log_2(\log_2\sqrt{2})$ 之值為___________ ．

解答　-1

解析 $\log_2(\log_2\sqrt{2})=\log_2(\log_2 2^{\frac{1}{2}})=\log_2\frac{1}{2}=-1$.

26.方程式 $2\log_2(x-1)+2=\log_2(x+2)$ 的解為____________ .

解答 $x=2$

解析 真數大於 0，故 $\begin{cases}x-1>0\\x+2>0\end{cases}$，得 $x>1$……①，

原式化為 $\log_2 4(x-1)^2=\log_2(x+2)$，得 $4(x-1)^2=x+2 \Leftrightarrow 4x^2-9x+2=0$

$\Leftrightarrow x=2$ 或 $\frac{1}{4}$……②，由①②得 $x=2$.

27.設實數 x 滿足 $0<x<1$，且 $\log_x 9-\log_3 x=1$，則 $x=$____________ .

解答 $\frac{1}{9}$

解析 $\log_x 9=\frac{\log_3 9}{\log_3 x}=\frac{2}{\log_3 x}$，故原式化為 $\frac{2}{\log_3 x}-\log_3 x=1$，

設 $t=\log_3 x$，$\frac{2}{t}-t=1 \Rightarrow t^2+t-2=0$，解得 $t=1$ 或 $t=-2$，

即 $\log_3 x=1$ 或 $\log_3 x=-2$，得 $x=3$ 或 $x=\frac{1}{9}$，因 $0<x<1$，故 $x=\frac{1}{9}$.

28.方程式 $\log_2(2^x+20)=\frac{x}{2}+2+\log_2 3$ 的解 $x=$____________ .

解答 2 或 $\frac{2}{\log 2}$

解析 $\log_2(2^x+20)=\log_2 2^{\frac{x}{2}}+\log_2 2^2+\log_2 3=\log_2 12\times 2^{\frac{x}{2}}$

$\Rightarrow 2^x+20=12\times 2^{\frac{x}{2}}$，設 $2^{\frac{x}{2}}=t \Rightarrow t^2-12t+20=0 \Rightarrow t=2$ 或 10

$\therefore x=2$ 或 $\frac{2}{\log 2}$.

29.求下列各式中 x 的值 .

(1) $\log_x 81=-\frac{4}{3}$，$x=$____________ . (2) $\log_x\frac{1}{\sqrt{5}}=-\frac{1}{4}$，$x=$____________ .

(3) $\log_{25}x=-1.5$，$x=$____________ . (4) $\log_x 9\sqrt{3}=5$，$x=$____________ .

解答 (1) $\frac{1}{27}$;(2)25;(3) $\frac{1}{125}$;(4) $\sqrt{3}$

解析 (1) $\log_x 81=-\frac{4}{3} \Rightarrow x^{-\frac{4}{3}}=81=3^4$

$\therefore x^{-\frac{1}{3}}=3 \Rightarrow (x^{-\frac{1}{3}})^3=3^3 \Rightarrow x^{-1}=27$ 故 $x=\frac{1}{27}$.

(2) $\log_x\frac{1}{\sqrt{5}}=-\frac{1}{4} \Rightarrow x^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow (x^{\frac{1}{4}})^{-1}=(5^{\frac{1}{2}})^{-1}$

$x^{\frac{1}{4}}=5^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (x^{\frac{1}{4}})^4=(5^{\frac{1}{2}})^4 \Rightarrow x=5^2=25$.

(3)$\log_{25}x=-1.5 \Rightarrow x=25^{-1.5}=(5^2)^{-\frac{3}{2}}=5^{-3}=\dfrac{1}{125}$.

(4) $\log_x 9\sqrt{3}=5 \Rightarrow x^5=9\sqrt{3}=3^{\frac{5}{2}}$ $\quad\therefore x=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$.

30.方程式$\log_7(7^x+49)=\dfrac{x}{2}+1+\log_7 2$的解 $x=$____________ .

解答 2

解析 $\log_7(7^x+49)=\log_7 7^{\frac{x}{2}}+\log_7 7+\log_7 2=\log_7 14\times 7^{\frac{x}{2}} \Rightarrow 7^x+49=14\cdot 7^{\frac{x}{2}}$

設$t=7^{\frac{x}{2}}$，原式 $\Rightarrow t^2-14t+49=0$

$(t-7)^2=0 \Rightarrow t=7$ 即$7^{\frac{x}{2}}=7 \Rightarrow \dfrac{x}{2}=1 \Rightarrow x=2$.

31.解$\log_{2x-3}(x-3)^2=1$，得 $x=$____________ .

解答 6

解析 (1)$\log_{2x-3}(x-3)^2=1=\log_{2x-3}(2x-3) \therefore (x-3)^2=2x-3$

$\Rightarrow x^2-8x+12=0 \Rightarrow (x-2)(x-6)=0 \Rightarrow x=2$ 或 $x=6$

(2)$(x-3)^2>0$ 且 $2x-3>0$ 且 $2x-3\neq 1 \Rightarrow x>\dfrac{3}{2}$ 且 $x\neq 2$ 且 $x\neq 3$

由(1)(2)知 $x=6$.