高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：101.12.19					
範圍	3-2 對數(A)	班級	一年____班	姓名	
		座號			

一、填充題 (每題 10 分)

1.化簡求下列各值：

(1) $\log_{10}\frac{25}{9}-\log_{10}5+\log_{10}\frac{27}{35}-\log_{10}\frac{3}{70}=$ ________ .

(2) $(\log_2 3+\log_{16}81)(\log_3 8-\log_9 2)=$ __________ .

解答 (1) 1;(2) 5

解析 (1)原式$=\log_{10}(\frac{25}{9}\div 5\times\frac{27}{35}\div\frac{3}{70})=\log_{10}(\frac{25}{9}\times\frac{1}{5}\times\frac{27}{35}\times\frac{70}{3})=\log_{10}10=1$

(2)原式$=(\log_2 3+\frac{4}{4}\log_2 3)(3\log_3 2-\frac{1}{2}\log_3 2)$

$=2\log_2 3\times\frac{5}{2}\log_3 2=(2\times\frac{5}{2})\log_2 3\times\log_3 2=5\times 1=5$

2.$4^{-2\log_2 3}+3^{\log_9 2}-5^{\frac{\log 2}{\log 5}}=$ ____________ .

解答 $\sqrt{2}-\frac{161}{81}$

解析 原式$=(2^2)^{-2\log_2 3}+3^{\frac{1}{2}\log_3 2}-5^{\log_5 2}=2^{\log_2 3^{-4}}+3^{\log_3\sqrt{2}}-2=3^{-4}+\sqrt{2}-2=\sqrt{2}-\frac{161}{81}$

3.方程式 $\log_2(x-1)=\log_4(2-x)+1$ 之解為____________ .

解答 $-1+2\sqrt{2}$

解析 原式 $\log_4(x-1)^2=\log_4(2-x)+\log_4 4\Rightarrow(x-1)^2=4(2-x)\Rightarrow x^2+2x-7=0\Rightarrow x=-1\pm 2\sqrt{2}$,

但真數 $\begin{cases}2-x>0\\x-1>0\end{cases}\Rightarrow 1<x<2\quad\therefore\ x=-1+2\sqrt{2}$

4.設 $\log_4 x=-\frac{3}{2}$， $\log_y\frac{16}{81}=\frac{4}{3}$， 則(1) $x=$ ____________ . (2) $y=$ ____________ .

解答 (1) $\frac{1}{8}$;(2) $\frac{8}{27}$

解析 (1) $\log_4 x=-\frac{3}{2}\Rightarrow x=4^{-\frac{3}{2}}=2^{-3}=\frac{1}{8}$

(2) $\log_y\frac{16}{81}=\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{16}{81}=y^{\frac{4}{3}}\Rightarrow(\frac{2}{3})^4=y^{\frac{4}{3}}\Rightarrow y^{\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\Rightarrow y=(\frac{2}{3})^3=\frac{8}{27}$

5.設 $a=\log_2 3, b=\log_3 11$, 以 a,b 表示下列各式之值：(1) $\log_2 12=$ _________. (2) $\log_{66}18=$ __________.

解答 (1)$2+a$;(2) $\frac{1+2a}{1+a+ab}$

解析 (1) $a=\log_2 3$， $b=\log_3 11$， $ab=\log_2 3\cdot\log_3 11=\log_2 11$

$\log_2 12=\log_2(2^2\times 3)=2\log_2 2+\log_2 3=2+a$

(2) $\log_{66}18=\frac{\log_2 18}{\log_2 66}=\frac{\log_2(2\times 3^2)}{\log_2(2\times 3\times 11)}=\frac{1+2\log_2 3}{1+\log_2 3+\log_2 11}=\frac{1+2a}{1+a+ab}$

6.已知 $\log_2 3=a$，$\log_3 7=b$，則以 a，b 表示 $\log_{\sqrt{6}}21=$ ____________ .

解答 $\frac{2a(1+b)}{1+a}$

解析 $\log_{\sqrt{6}}21=2\log_6 21=2\frac{\log_3 21}{\log_3 6}=2\frac{\log_3 3+\log_3 7}{\log_3 2+\log_3 3}=2\frac{1+b}{\frac{1}{a}+1}=\frac{2a(1+b)}{1+a}$

7.$3\log_2\sqrt{2}-\log_2\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\log_2 3=$ ____________ .

解答 $\frac{5}{2}$

解析 原式$=3\log_2 2^{\frac{1}{2}}-\log_2\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\log_2 3=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\log_2 3+1+\frac{1}{2}\log_2 3=\frac{5}{2}$

8.$\log_2(\log_2 32+\log_{\frac{1}{2}}\frac{3}{4}+\log_4 36)=$ ____________ .

解答 3

解析 原式$=\log_2(\log_2 2^5+\log_{2^{-1}}\frac{3}{4}+\log_{2^2}6^2)=\log_2(5-\log_2\frac{3}{4}+\log_2 6)$

$=\log_2(5+\log_2\frac{6}{\frac{3}{4}})=\log_2(5+3)=3$

9.求 $3^{\log_3 5}+\log_2\sqrt{8}-\log_3 1+\log_5 8\cdot\log_2 25=$ ____________ .

解答 $\frac{25}{2}$

解析 $3^{\log_3 5}+\log_2\sqrt{8}-\log_3 1+\log_5 8\cdot\log_2 25$

$=5+\log_2 2^{\frac{3}{2}}-0+3\log_5 2\cdot\log_2 25=5+\frac{3}{2}+3\log_5 25=5+\frac{3}{2}+6=\frac{25}{2}$

10.$\log_3 5\cdot\log_2 7\cdot\log_{125}8\cdot\log_{49}9=$ ____________ .

解答 1

解析 原式$=\log_3 5\cdot\log_2 7\cdot\log_5 2\cdot\log_7 3=\log_3 3=1$

11.設 $\log_3\{\log_{\frac{1}{2}}[\log_5(x+3)]\}$有意義，則 x 的範圍是____________ .

解答 $-2<x<2$

解析 $\log_{\frac{1}{2}}[\log_5(x+3)]>0=\log_{\frac{1}{2}}1$，即 $0<\log_5(x+3)<1$

$\log_5 1<\log_5(x+5)<\log_5 5$ 又底$\frac{1}{2}<1\Rightarrow 1<x+3<5 \Rightarrow -2<x<2$

12.設 $4^{\log x}-3\cdot x^{\log 2}-4=0$，則 $x=$______________．

解答 100

解析 $(2^{\log x})^2-3\cdot 2^{\log x}-4=0\Rightarrow(2^{\log x}-4)(2^{\log x}+1)=0\Rightarrow 2^{\log x}=4=2^2\Rightarrow \log x=2\quad\therefore\ x=100$

13. $\log_3(\log_9 49)+2\log_9(\log_7 3^9)=$ ______________．

解答 2

解析 所求 $=\log_3(\log_9 49)+\log_3(\log_7 3^9)=\log_3(\log_9 49\cdot\log_7 3^9)=\log_3(\log_3 7\cdot\log_7 3^9)=\log_3 9=2$

14.求 $\log_3 7\cdot\log_7 90-\dfrac{\log_7 100}{\log_{49} 81}=$______________．

解答 2

解析 原式 $=\log_3 90-\dfrac{2\log_7 10}{\log_7 9}=2+\log_3 10-\dfrac{2\log_7 10}{2\log_7 3}=2+\log_3 10-\log_3 10=2$

15.求 $\log_2\dfrac{1}{16}+\log_5 125+\log_{\sqrt{3}}1+2^{\log_2 3}$ 之值=______________．

解答 2

解析 原式 $=-4+3+0+3=2$

16.化簡 $\log_{\sqrt{2}}\dfrac{1}{2}+\log_2\dfrac{4\sqrt{3}}{3}-\log_4\dfrac{1}{6}=$______________．

解答 $\dfrac{1}{2}$

解析 原式 $=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}\log_2\dfrac{1}{2}+\log_2\dfrac{4\sqrt{3}}{3}-\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{1}{6}=\log_2[(\dfrac{1}{2})^2\times\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{6}]=\log_2\sqrt{2}=\dfrac{1}{2}$

17.解 $\begin{cases}\log_x 4-\log_y 2=2\\ \log_x 16+\log_y 8=-1\end{cases}$，得(1) $x=$______________，(2) $y=$______________．

解答 (1)4;(2)$\dfrac{1}{2}$

解析 $\begin{cases}2\log_x 2-\log_y 2=2\cdots\cdots①\\ 4\log_x 2+3\log_y 2=-1\cdots\cdots②\end{cases}$

$①\times 3+②\ \Rightarrow\ 10\log_x 2=5\ \Rightarrow\ \log_x 2=\dfrac{1}{2}$，$x^{\frac{1}{2}}=2\ \Rightarrow\ x=4$，$y=\dfrac{1}{2}$

18.設 $\log_a x=3$，$\log_b x=4$，$\log_c x=5$，$\log_d x=6$，則 $\log_{abcd}x$ 之值為______________．

解答 $\dfrac{20}{19}$

解析 $\log_x a=\dfrac{1}{3}$，$\log_x b=\dfrac{1}{4}$，$\log_x c=\dfrac{1}{5}$，$\log_x d=\dfrac{1}{6}$

$\Rightarrow\log_x a+\log_x b+\log_x c+\log_x d=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}\ \Rightarrow\log_x abcd=\dfrac{19}{20}\ \Rightarrow\log_{abcd}x=\dfrac{20}{19}$

19.方程式 $\log_{\frac{1}{2}}(x+3)-2\log_{\frac{1}{2}}(x-1)=1$ 之解為______________．

解答 $x=5$

解析 (1)原式有意義 $\Rightarrow \begin{cases} x+3>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Rightarrow x>1$

(2)$\log_{\frac{1}{2}}(x+3)-2\log_{\frac{1}{2}}(x-1)=1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x+3}{(x-1)^2}=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{x+3}{(x-1)^2}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow x^2-2x+1=2x+6 \Rightarrow x^2-4x-5=0 \Rightarrow x=5$ 或 -1

由(1)，(2)得 $x=5$

20.解$\begin{cases} \log_2 x+\log_y 8=2 \\ \log_y 2+2\log_8 x=1 \end{cases}$，得$(x，y)=$＿＿＿＿＿＿＿．

解答 (2，8)

解析 $\begin{cases} \log_2 x+3\log_y 2=2\cdots\cdots① \\ \frac{2}{3}\log_2 x+\log_y 2=1\cdots\cdots② \end{cases}$ ②×3－①得 $\log_2 x=1 \Rightarrow x=2，y=8$

21.方程式$(8x)^{\log_2 x}=4x^2$之解為＿＿＿＿＿＿＿．

解答 2 或$\dfrac{1}{4}$

解析 原式取對數 $\Rightarrow \log_2(8x)^{\log_2 x}=\log_2(4x^2) \Rightarrow \log_2 x(3+\log_2 x)=2+2\log_2 x$

$(\log_2 x)^2+\log_2 x-2=0 \Rightarrow (\log_2 x+2)(\log_2 x-1)=0 \Rightarrow \log_2 x=-2$ 或 1

即 $x=2^{-2}=\dfrac{1}{4}$ 或 $2^1=2$

22.設 $18^a=2$，試以 a 表示 $\log_3 2=$＿＿＿＿＿＿＿．

解答 $\dfrac{2a}{1-a}$

解析 $18^a=2 \Rightarrow a\log 18=\log 2 \Rightarrow a(2\log 3+\log 2)=\log 2 \Rightarrow 2a\cdot\dfrac{\log 3}{\log 2}+a=1$

$\Rightarrow \log_2 3=\dfrac{1-a}{2a} \quad \therefore \log_3 2=\dfrac{2a}{1-a}$

23.x 的方程式 $x^{(\log_2 x)-a}=32$ 有一根為$\dfrac{1}{2}$，則(1) $a=$＿＿＿＿＿．(2)此方程式的另一根為＿＿＿＿＿＿．

解答 (1) 4;(2) 32

解析 (1)∵ $\dfrac{1}{2}$為 $x^{(\log_2 x)-a}=32$ 之一根 $\Rightarrow (\dfrac{1}{2})^{(\log_2\frac{1}{2})-a}=32 \Rightarrow (\dfrac{1}{2})^{-1-a}=2^5 \Rightarrow -1-a=-5 \Rightarrow a=4$

(2) $x^{(\log_2 x)-4}=32 \Rightarrow \log_2 x^{(\log_2 x)-4}=\log_2 32 \Rightarrow (\log_2 x-4)(\log_2 x)=5$

$\Rightarrow (\log_2 x)^2-4\log_2 x-5=0 \Rightarrow (\log_2 x-5)(\log_2 x+1)=0 \Rightarrow \log_2 x=5，-1$

$\Rightarrow x=2^5，2^{-1} \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}，32$

∴ 另一根為 32

24.若 a,b,c,d,e 均為不等於 1 的正數，且 $a^2=c^3, c^2=e^5$，則 $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c d\cdot\log_d e$ 之值 ＝＿＿＿＿＿．

解答 $\dfrac{4}{15}$

解析 $\begin{cases} a^2 = c^3 \\ c^2 = e^5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^4 = c^6 \\ c^6 = e^{15} \end{cases} \Rightarrow a^4 = e^{15} \Rightarrow e = a^{\frac{4}{15}}$

$\therefore \log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d \cdot \log_d e = \log_a e = \log_a a^{\frac{4}{15}} = \dfrac{4}{15}$

25.若 α，β 為$(\log x)^2 - \log x^2 - 6 = 0$ 之兩根，則 $\log_\alpha \beta + \log_\beta \alpha$ 之值為____________.

解答 $-\dfrac{8}{3}$

解析 令 $t = \log x$，得 $t^2 - 2t - 6 = 0$ 之兩根為 $\log\alpha$，$\log\beta \Rightarrow \log\alpha + \log\beta = 2$，$(\log\alpha)(\log\beta) = -6$

$\therefore \log_\alpha \beta + \log_\beta \alpha = \dfrac{\log\beta}{\log\alpha} + \dfrac{\log\alpha}{\log\beta} = \dfrac{(\log\alpha + \log\beta)^2 - 2(\log\alpha)(\log\beta)}{(\log\alpha)(\log\beta)} = \dfrac{4 - 2\times(-6)}{-6} = -\dfrac{8}{3}$