高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：101.12.12					
範圍	3-1.2 指數	班級	一年____班	姓名	
		座號			

一、填充題 (每題 10 分)

1.若 $53^x=9$，$477^y=243$，則 $\frac{2}{x}-\frac{5}{y}=$__________ .

解答 -2

解析 $\begin{cases}53^x=3^2\\477^y=3^5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}53=3^{\frac{2}{x}}\cdots\cdots①\\477=3^{\frac{5}{y}}\cdots\cdots②\end{cases}$，① ÷ ② 得 $3^{\frac{2}{x}-\frac{5}{y}}=\frac{53}{477}=\frac{1}{9}=3^{-2}$ $\therefore$ $\frac{2}{x}-\frac{5}{y}=-2$

2.若 $2^{0.6}=1.516$，$2^{0.03}=1.021$，則(1) $2^{1.63}=$__________ . (2) $2^{-0.37}=$__________ .

解答 (1) 3.095672;(2) 0.773918

解析 (1) $2^{1.63}=2^{1+0.6+0.03}=2^1\cdot2^{0.6}\cdot2^{0.03}=2\times1.516\times1.021=3.095672$

(2) $2^{-0.37}=2^{0.63-1}=2^{0.6+0.03-1}=2^{0.6}\cdot2^{0.03}\cdot2^{-1}=(1.516\times1.\ .021)\div2=0.773918$

3.方程式 $2^{x+1}-6\cdot2^{x-1}+10\cdot2^{x-2}=12$ 之解為__________ .

解答 3

解析 $2^{x+1}-6\cdot2^{x-1}+10\cdot2^{x-2}=12\Rightarrow2\cdot2^x-6\cdot2^x\cdot2^{-1}+10\cdot2^x\cdot2^{-2}=12\Rightarrow(2-\frac{6}{2}+\frac{10}{4})\cdot2^x=12$

$\Rightarrow\frac{3}{2}\cdot2^x=12\Rightarrow2^x=8\Rightarrow x=3$

4.化簡求值：(1)$[(\frac{1}{4})^6\cdot64]^{-4}\cdot(32)^{-3}=$__________ . (2)$(\frac{81}{16})^{-0.25}\cdot(\frac{4}{9})^{-\frac{1}{2}}\cdot(0.25)^{-1.5}=$__________ .

解答 (1) 512;(2) 8

解析 (1)原式 $=(2^{-12}\times2^6)^{-4}\times(2^5)^{-3}=2^{24}\times2^{-15}=2^{24-15}=2^9=512$

(2)原式 $=[(\frac{3}{2})^4]^{-\frac{1}{4}}\times[(\frac{2}{3})^2]^{-\frac{1}{2}}\times[(\frac{1}{2})^2]^{-\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}\times8=8$

5.設 $2^x=3^y=216$，則 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 之值為__________ .

解答 $\frac{1}{3}$

解析 $2^x=6^3\Rightarrow2=6^{\frac{3}{x}}\cdots\cdots①$，$3^y=6^3\Rightarrow3=6^{\frac{3}{y}}\cdots\cdots②$

①×②得 $6=6^{\frac{3}{x}+\frac{3}{y}}\Rightarrow\frac{3}{x}+\frac{3}{y}=1\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$

6.若 $a^x+a^{-x}=5$，則 $a^{3x}+a^{-3x}=$__________ .

解答 110

解析 $a^x+a^{-x}=5$，$a^{3x}+a^{-3x}=(a^x+a^{-x})^3-3a^x\cdot a^{-x}(a^x+a^{-x})=5^3-3\times5=110$

7.設 $a>0$，且 $a^{2x}=3$，求 $\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^{x}-a^{-x}}=$__________ .

解答 $\dfrac{14}{3}$

解析 原式 $=\dfrac{a^{4x}+a^{-2x}}{a^{2x}-1}=\dfrac{(a^{2x})^2+(a^{2x})^{-1}}{a^{2x}-1}=\dfrac{3^2+3^{-1}}{3-1}=\dfrac{9+\frac{1}{3}}{2}=\dfrac{\frac{28}{3}}{2}=\dfrac{14}{3}$

8.若 $x>0$，且 $x+x^{-1}=7$，求 $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=$__________ .

解答 3

解析 $x+x^{-1}=7$，$x>0$，$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2=x+2+x^{-1}=7+2=9$ $\therefore$ $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=\pm 3$（$-3$ 不合）

9.設 $\sqrt[x]{32}=\sqrt[y]{2^{3y-6}}$，且 $3^{15y+3x}=81^{xy}$，則$(x,y)=$__________ .

解答 (5,3)

解析 $\begin{cases}\sqrt[x]{32}=\sqrt[y]{2^{3y-6}}\\3^{15y+3x}=81^{xy}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2^{\frac{5}{x}}=2^{3-\frac{6}{y}}\\3^{15y+3x}=3^{4xy}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{5}{x}=3-\dfrac{6}{y}\\15y+3x=4xy\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{y}=3\\\dfrac{15}{x}+\dfrac{3}{y}=4\end{cases}$ $\therefore$ $(x,y)=(5,3)$

10.解方程式：

(1) $4^{x+1}-5\cdot 2^{x+2}+16=0$，得 $x=$__________ .

(2) $10^x-4\cdot 5^x-5\cdot 2^x+20=0$，得 $x=$__________ .

解答 (1) 0，2;(2) 1，2

解析 (1)設 $2^x=t$，$t>0$ $\Rightarrow$ $4t^2-20t+16=0$ $\Rightarrow$ $t=1$或4 $\therefore$ $2^x=1$或4，$x=0$ 或2

(2) $5^x\cdot 2^x-4\cdot 5^x-5\cdot 2^x+20=0$ $\Rightarrow$ $(5^x-5)(2^x-4)=0$ $\therefore$ $5^x=5$或$2^x=4$ $\Rightarrow$ $x=1$或$x=2$

11.設 $9^{x+1}-3^{x+4}+1=0$ 的二實根為 α，β，則 $\alpha+\beta=$__________ .

解答 -2

解析 設 $y=3^x$，則$9y^2-81y+1=0$之二根為$\begin{cases}y_1=3^{\alpha}\\y_2=3^{\beta}\end{cases}$，$y_1y_2=\dfrac{1}{9}=3^{\alpha}\cdot 3^{\beta}$

即 $3^{\alpha+\beta}=3^{-2}$ $\therefore$ $\alpha+\beta=-2$

12.設 $abc\neq 0$，且 $2^a=3^b=6^c$，求 $bc+ca-ab=$__________ .

解答 0

解析 $\begin{cases}2^a=6^c\\3^b=6^c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2=6^{\frac{c}{a}}\\3=6^{\frac{c}{b}}\end{cases}$，二式相乘

$2\times 3=6^{\frac{c}{a}}\cdot 6^{\frac{c}{b}}\Rightarrow 6=6^{\frac{c}{a}+\frac{c}{b}}$，即$\dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}=1\Rightarrow bc+ac=ab$ $\therefore$ $bc+ca-ab=0$

13.方程式 $2(4^x+4^{-x})-7(2^x+2^{-x})+9=0$，

(1)令 $u=2^x+2^{-x}$，則原方程式表成 u 的方程式為＿＿＿＿＿．　(2) x 之解為＿＿＿＿＿．

解答　(1) $2u^2-7u+5=0$;(2) ±1

解析　(1) $4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=u^2-2\cdot2^x\cdot2^{-x}=u^2-2$

原式 $\Rightarrow\ 2(u^2-2)-7u+9=0\ \Rightarrow\ 2u^2-7u+5=0$

(2) $(u-1)(2u-5)=0$，$u=1$(不合)或 $\frac{5}{2}$　($\because\ u\ge2$) $\Rightarrow\ 2^x+2^{-x}=\frac{5}{2}\ \Rightarrow\ x=\pm1$

14.設 $(\frac{5}{2})^{\frac{1}{x}}=4^{-\frac{1}{y}}=10$，則 $y^3-x^3+3xy=$＿＿＿＿＿．

解答　-1

解析　由已知 $\frac{5}{2}=10^x$，$4=10^{-y}$　$\therefore\ \frac{5}{2}\cdot4=10^{x-y}$，即 $x-y=1$

故 $y^3-x^3+3xy=(y-x)^3+3yx(y-x)+3xy=(-1)^3-3xy+3xy=-1$

15.若 $a\in\boldsymbol{R}$，且 x 的方程式 $2^{2x}+2a\cdot2^x+3-2a=0$ 有相異兩實根，則 a 的範圍為＿＿＿＿＿．

解答　$a<-3$

解析　設 $y=2^x$，則方程式化為 $y^2+2ay+(3-2a)=0$

$\because\ x$ 有兩相異實根 $\Rightarrow\ y$ 有兩相異正根

$$\therefore\left\{\begin{array}{l}D=4a^2-4(3-2a)>0\Rightarrow(a+3)(a-1)>0\Rightarrow a>1\text{ 或 }a<-3\\ \text{兩根和 }=-2a>0\Rightarrow a<0\\ \text{兩根積 }=3-2a>0\Rightarrow a<\frac{3}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow a<-3$$

16.某次實驗中，每經過一天，細菌數目就會增加 2 倍，問：

(1) 2 天後的細菌數是 3 天前的細菌數的＿＿＿＿＿倍．

(2)若開始時細菌數是 10000 個，n 天後細菌數超過 1280000 個($n\in\boldsymbol{N}$)，則 n 的最小值為＿＿＿＿＿．

解答　(1)243;(2)5

解析　(1)每過一天，細菌數會增加 2 倍，即為原來的 3 倍，又共經 5 天，∴所求為 $3^5=243$ 倍．

(2)$10000\times3^n>1280000\Rightarrow3^n>128$，$\therefore\ n\ge5\Rightarrow n$ 的最小值為 5．

28.鋼琴的十二平均律理論：用第一條弦的長度除以 $\sqrt[12]{2}$ 得到第二個音的弦長，將第二條弦的長度除以 $\sqrt[12]{2}$ 得到第三個音的弦長，以下用相同的方法求得各個音的弦長，設第一個音的弦長為 1，則第 m 個音的弦長為 $\frac{1}{2}$ 時，m 值為＿＿＿＿．

解答　13

解析　第 m 個音的弦長為 ℓ_m 時，$\ell_1=\ell_2\cdot\sqrt[12]{2}$，得 $\ell_2=2^{-\frac{1}{12}}$，

同理 $\ell_3=(2^{-\frac{1}{12}})^2$，…，知 $\ell_m=(2^{-\frac{1}{12}})^{m-1}=2^{-\frac{m-1}{12}}$，由 $2^{-\frac{m-1}{12}}=2^{-1}$，得 $m=13$．

17.若 $(\frac{1}{4})^{x^2-3x}>0.0625$，則 x 的解為＿＿＿＿＿．

解答　$\frac{3-\sqrt{17}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{17}}{2}$

解析 $(\frac{1}{4})^{x^2-3x}>0.0625=\frac{625}{10000}=\frac{1}{16}=(\frac{1}{4})^2$，$\because\ 0<\frac{1}{4}<1$，$\therefore\ x^2-3x<2$，$\therefore\ x^2-3x-2<0$

$\Rightarrow\frac{3-\sqrt{17}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{17}}{2}$.

18.設 $a=(\frac{1}{2})^{-1}$，$b=(\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$，$c=\sqrt[3]{4}$，$d=8^{\frac{-1}{3}}$，則 a，b，c，d 之大小順序為____________ .

解答 $a>c>b>d$

解析 $a=2^1$，$b=2^{-\frac{1}{2}}$，$c=2^{\frac{2}{3}}$，$d=2^{-1}\Rightarrow 1>\frac{2}{3}>-\frac{1}{2}>-1$　$\therefore\ a>c>b>d$

19.若 x，y，z 均為正數，且 $2^x=3^y=5^z$，則 $2x$，$3y$，$5z$ 的大小關係為____________ .

解答 $5z>2x>3y$

解析 $\because\ 2^x=3^y\ \Rightarrow\ (2^x)^6=(3^y)^6\ \Rightarrow\ (2^3)^{2x}=(3^2)^{3y}\ \Rightarrow\ 8^{2x}=9^{3y}$　　$\because\ 8<9\ \Rightarrow\ 2x>3y$

同理，$2^x=5^z\ \Rightarrow\ (2^x)^{10}=(5^z)^{10}\ \Rightarrow\ (2^5)^{2x}=(5^2)^{5z}\ \Rightarrow\ 32^{2x}=25^{5z}$

$\because\ 32>25\ \Rightarrow\ 2x<5z$　$\therefore\ 5z>2x>3y$

20.比較大小：

(1) $2^{60}, 3^{30}, 6^{20}$ 由小而大排列為____________ . (2) $\sqrt[4]{27}$，$\sqrt[6]{9}$，$\sqrt{3\sqrt[3]{3}}$ 由小而大排列為____________ .

解答 (1) $3^{30}<6^{20}<2^{60}$;(2) $\sqrt[6]{9}<\sqrt{3\sqrt[3]{3}}<\sqrt[4]{27}$

解析 (1) $2^{60}=(2^6)^{10}=64^{10}$，$3^{30}=(3^3)^{10}=27^{10}$，$6^{20}=(6^2)^{10}=36^{10}$，　$\because 27<36<64 \therefore 3^{30}<6^{20}<2^{60}$

(2) $\sqrt[4]{27}=3^{\frac{3}{4}}$，$\sqrt[6]{9}=3^{\frac{2}{6}}=3^{\frac{1}{3}}$，$\sqrt{3\ \sqrt[3]{3}}=(3^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{2}{3}}$　$\because\ \frac{1}{3}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$　$\therefore\ \sqrt[6]{9}<\sqrt{3\ \sqrt[3]{3}}<\sqrt[4]{27}$

21. $2\cdot 4^x-9\cdot 2^x+4\leq 0$ 之解為____________ .

解答 $-1\leq x\leq 2$

解析 $2\cdot(2^x)^2-9\cdot(2^x)+4\leq 0\Rightarrow(2\cdot 2^x-1)(2^x-4)\leq 0\Rightarrow\ \frac{1}{2}\leq 2^x\leq 4\Rightarrow -1\leq x\leq 2$

22.不等式 $2\cdot 6^x-3^x-18\cdot 2^x+9<0$ 之解為____________ .

解答 $-1<x<2$

解析 $2\cdot 6^x-3^x-18\cdot 2^x+9<0\Rightarrow(3^x-9)(2\cdot 2^x-1)<0$

$\Rightarrow(3^x-9)(2^{x+1}-2^0)<0\Rightarrow(x-2)(x+1)<0\Rightarrow -1<x<2$

23.若 $-1\leq x\leq 0$，$f(x)=2^{x+2}-3\cdot 4^x-1$，當 $x=x_0$ 時，$f(x)$有最小值 y_0，則$(x_0，y_0)=$____________ .

解答 (0，0)

解析 令 $t=2^x$　$\because\ -1\leq x\leq 0\ \Rightarrow\ 2^{-1}\leq 2^x\leq 2^0\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}\leq t\leq 1$

$f(x)=4t-3t^2-1=-3(t-\frac{2}{3})^2+\frac{4}{3}-1=-3(t-\frac{2}{3})^2+\frac{1}{3}$

$\therefore$ 當 $t=1$，即 $x=0$ 時，$f(x)$有最小值$=f(0)=0$

24.設 $f(x)=4^x+4^{-x}+2^x+2^{-x}$，$x\in\boldsymbol{R}$，若當 $x=a$ 時，$f(x)$有最小值 m，則數對$(a，m)=$____________ .

解答 (0，4)

解析 設 $t=2^x+2^{-x}\Rightarrow 4^x+4^{-x}=t^2-2$，且 $t\geq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$

$f(x)=(t^2-2)+t=t^2+t-2=(t+\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}$

$\because$ $t\ge 2\Rightarrow$ 當 $t=2$ 時，$f(x)$有最小值 $=4$，即當 $x=0$ 時，$f(x)$有最小值 $=4$

25.若 x 為大於 0 的實數，則不等式 $x^{2x^3-3x^2}>x^{3x-2}$ 的解為____________.

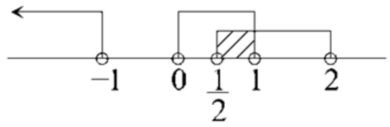
解答 $\frac{1}{2}<x<1$ 或 $2<x$

解析 (1) $x>1$ 時，$x^{2x^3-3x^2}>x^{3x-2}$ $\Rightarrow 2x^3-3x^2>3x-2\Rightarrow(x+1)(x-2)(2x-1)>0$

$\Rightarrow -1<x<\frac{1}{2}$ 或 $x>2$……①，但 $x>1$……②，由①、②知 $x>2$

(2) $0<x<1$ 時，$2x^3-3x^2<3x-2\Rightarrow(x+1)(x-2)(2x-1)<0$

$\Rightarrow x<-1$ 或 $\frac{1}{2}<x<2$……③，但 $0<x<1$……④，由③、④知 $\frac{1}{2}<x<1$



(3) $x=1$ 時，顯然不合

由(1)(2)(3)知此不等式之解為 $\frac{1}{2}<x<1$ 或 $2<x$

26.設 $0\le x\le 3$，求 $(\frac{1}{5})^{x^2-2x}$ 的最小值為____________.

解答 $\frac{1}{125}$

解析 $(\frac{1}{5})^{x^2-2x}=(5^{-1})^{x^2-2x}=5^{-x^2+2x}=5^{-(x-1)^2+1}$，$\because$ $0\le x\le 3$，$\therefore$當 $x=3$ 時，最小值$=5^{-3}=\frac{1}{125}$.

27.若 $3^x+2^x>3^{50}$，則最小的正整數 $x=$ ____________.

解答 50

解析 $\because$ $3^{50}+2^{50}>3^{50}$，又$(3^{49}+2^{49})-3^{50}=2^{49}+(3^{49}-3^{50})=2^{49}+3^{49}(1-3)=2^{49}-2\times 3^{49}<0$，

$\therefore$ $3^{49}+2^{49}<3^{50}\Rightarrow x$ 的最小正整數值$=50$.

28.若 $-2\le x\le 1$，求函數 $f(x)=-(\frac{1}{9})^x+6\cdot(\frac{1}{3})^x$ 的最大值____________.

解答 9

解析 $\because -2\le x\le 1\Rightarrow(\frac{1}{3})^1\le(\frac{1}{3})^x\le(\frac{1}{3})^{-2}\Rightarrow\frac{1}{3}\le(\frac{1}{3})^x\le 9$,

$f(x)=-(\frac{1}{9})^x+6\cdot(\frac{1}{3})^x=-[(\frac{1}{3})^x]^2+6\cdot(\frac{1}{3})^x=-[(\frac{1}{3})^x-3]^2+9$,

$\therefore$當 $(\frac{1}{3})^x=3$，即 $x=-1$時， $f(x)$ 有最大值 9 .