

高雄市明誠中學 高一數學平時測驗				日期：101.11.20	
範圍	2-4 多項不等式	班級	一年__班	姓名	
		座號			

一、填充題 (每題 10 分)

1. 若 $a < 0$ ，則不等式 $ax - 3a < 0$ 之解為_____。

解答 $x > 3$

解析 $ax - 3a = a(x - 3) < 0 \quad \because a < 0 \quad \therefore x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$ 。

2. 不等式 $-6x^2 - x + 2 \geq 0$ 的解為_____。

解答 $-\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$

解析 $-6x^2 - x + 2 \geq 0 \Rightarrow 6x^2 + x - 2 \leq 0 \Rightarrow (2x - 1)(3x + 2) \leq 0 \Rightarrow -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$ 。

3. 不等式 $ax^2 + 5x + b > 0$ 的解為 $-\frac{1}{2} < x < 3$ ，則數對 $(a, b) =$ _____。

解答 $(-2, 3)$

解析 $-\frac{1}{2} < x < 3 \Rightarrow (x + \frac{1}{2})(x - 3) < 0 \Rightarrow x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} < 0 \Rightarrow -2x^2 + 5x + 3 > 0 \cdots (1)$,

(1)式與 $ax^2 + 5x + b > 0$ 的解相同, $\therefore -\frac{a}{2} = \frac{5}{5} = \frac{b}{3} \quad \therefore a = -2, b = 3$ 。

4. 不等式 $x > 3x - 4 \geq -2x + 1$ 的解為_____。

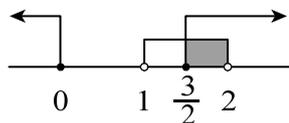
解答 $1 \leq x < 2$

解析 原不等式可改寫成 $\begin{cases} x > 3x - 4 \\ 3x - 4 \geq -2x + 1 \end{cases}$ ，整理得 $\begin{cases} 2x < 4 \\ 5x \geq 5 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} x < 2 \\ x \geq 1 \end{cases}$ ，即 $1 \leq x < 2$ 。

5. 聯立不等式 $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 < 0 \\ 2x^2 - 3x \geq 0 \end{cases}$ 的解為_____。

解答 $\frac{3}{2} \leq x < 2$

解析 原不等式 $\begin{cases} (x-1)(x-2) < 0 \\ x(2x-3) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 < x < 2 \\ x \geq \frac{3}{2} \text{ 或 } x \leq 0 \end{cases}$ ， $\therefore \frac{3}{2} \leq x < 2$ 。



6. 若不等式 $ax^2 + 2(2a - 1)x + (7a - 2) < 0$ 對於一切實數 x 恆成立，求實數 a 的範圍為_____。

解答 $a < -1$

解析 $ax^2 + 2(2a - 1)x + (7a - 2) < 0$ (對任意實數 x 恆成立)

$\Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ D < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \cdots (1) \\ (2a - 1)^2 - a(7a - 2) < 0 \cdots (2) \end{cases}$

$$\Rightarrow 3a^2 + 2a - 1 > 0 \Rightarrow (3a - 1)(a + 1) > 0 \Rightarrow a > \frac{1}{3} \text{ 或 } a < -1 \cdots (3)$$

由(1)(3)得 $a < -1$.

7. 設 m 是實數, 若二次函數 $y = mx^2 + 2m^2x$ 之圖形恆在直線 $L: y = 2mx - 9m$ 之上方, 則 m 的範圍為_____.

解答 $0 < m < 4$

解析 $(mx^2 + 2m^2x) - (2mx - 9m) > 0$ (對任意實數 x 恆成立)

$$\Rightarrow m[x^2 + 2(m-1)x + 9] > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m > 0 \\ (m-1)^2 - 9 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > 0 \\ (m-1)^2 < 3^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -3 < m-1 < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -2 < m < 4 \end{cases} \Rightarrow 0 < m < 4 .$$

8. 對任意實數 x , $\frac{x^2 + 2ax + 1}{3x^2 - 2x + 3} \leq 1$ 恆成立, 則實數 a 的範圍為_____.

解答 $-3 \leq a \leq 1$

解析 $\frac{x^2 + 2ax + 1}{3x^2 - 2x + 3} - 1 \leq 0$ (恆成立)

$$\Rightarrow \frac{-2x^2 + (2a+2)x - 2}{3x^2 - 2x + 3} \leq 0 \text{ (恆成立) ,}$$

又 $3x^2 - 2x + 3 > 0$ 恆成立,

$$\therefore D = (-2)^2 - 4 \times 3 \times 3 < 0,$$

$$\therefore (3x^2 - 2x + 3)(2x^2 - (2a+2)x + 2) \geq 0,$$

$$\therefore 3x^2 - 2x + 3 > 0 \text{ (恆成立) ,}$$

$$\therefore 2x^2 - (2a+2)x + 2 \geq 0 \text{ (恆成立) ,}$$

$$D = (a+1)^2 - 4 \leq 0 \Rightarrow -2 \leq a+1 \leq 2 \Rightarrow -3 \leq a \leq 1 .$$

9. 設 $k \in \mathbb{R}$, 若 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = kx^2 + (k+1)x + k \geq 0$ 恆成立, 則:

(1) k 的範圍為_____ . (2) 求 $g(k) = -k^2 - 7k + 2$ 的最大值 = _____ .

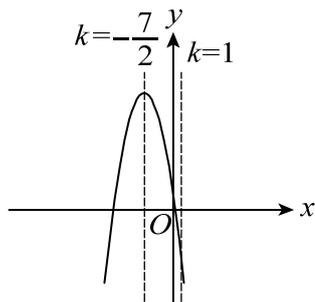
解答 (1) $k \geq 1$; (2) -6

解析 (1) $\begin{cases} k > 0 \\ (k+1)^2 - 4 \cdot k \cdot k \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > 0 \\ (k+1+2k)(k+1-2k) \leq 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} k > 0 \\ (3k+1)(k-1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > 0 \\ k \leq -\frac{1}{3} \text{ 或 } k \geq 1 \end{cases} \Rightarrow k \geq 1 .$$

$$(2) \text{ 配方: } g(k) = -(k + \frac{7}{2})^2 + \frac{57}{4} ,$$

\therefore 當 $k = 1$ 時, $g(k)$ 有最大值 $g(1) = -6$.



10. 設 $f(x)$ 為二次多項式, $f(x) > 0$ 之解為 $-9 < x < 3$, 則 $f(3x) \geq 0$ 之解為_____.

解答 $-3 \leq x \leq 1$

解析 $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow -9 \leq x \leq 3$,

$$f(3x) \geq 0 \Leftrightarrow -9 \leq 3x \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 1.$$

11. 已知 $f(x)$ 為二次函數, 且 $f(x) < 0$ 的解為 $-2 < x < 5$, 則 $f(3x-1) \geq 0$ 的解為_____.

解答 $x \geq 2$ 或 $x \leq -\frac{1}{3}$

解析 由於 $f(x) < 0$ 的解為 $-2 < x < 5$

$$\text{設 } f(x) = a(x-5)(x+2), \text{ 其中 } a > 0$$

$$\text{故 } f(3x-1) = a[(3x-1)-5][(3x-1)+2] = a(3x-6)(3x+1)$$

$$f(3x-1) \geq 0 \Rightarrow a(3x-6)(3x+1) \geq 0 \Rightarrow (x-2)(x+\frac{1}{3}) \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \text{ 或 } x \leq -\frac{1}{3}.$$

12. 解不等式 $2x^2 - 8x + 11 < 0$, 得 x 之解為_____.

解答 無實數解

解析 $\because D = (-8)^2 - 4 \times 2 \times 11 < 0$, 表示 $2x^2 - 8x + 11$ 恆正, $\therefore 2x^2 - 8x + 11 < 0$ 無實數解.

13. 一梯形兩底長分別為 $(3x-4)$ 公分, $(2x-1)$ 公分, 高為 8 公分, 若此梯形的面積不大於 80 平方公分, 則 x 的範圍為_____.

解答 $\frac{4}{3} < x \leq 5$

解析 $3x-4 > 0, 2x-1 > 0, \frac{[(3x-4)+(2x-1)] \times 8}{2} \leq 80 \Rightarrow x > \frac{4}{3}, x > \frac{1}{2}, x \leq 5 \Rightarrow \frac{4}{3} < x \leq 5.$

14. 某校家長會要從 180 位家長代表中選出 9 位理事, 180 位代表每人投一票互選, 如果又延要選上理事, 則至少要得_____票, 才能保證當選.

解答 19

解析 設至少要得 x 票, 則 $x > 180 - 9x \Rightarrow 10x > 180 \Rightarrow x > 18$, 至少要得 19 票才能保證當選.

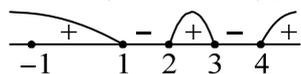
15. 設 x 是實數, 則不等式: $(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 2x - 3)(x^2 - 3x - 4)(x^2 + x + 1) \geq 0$ 的解為_____.

解答 $x \leq 1$ 或 $2 \leq x \leq 3$ 或 $x \geq 4$

解析 $(x-1)(x-2)(x-3)(x+1)(x-4)(x+1)[(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}] \geq 0,$

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x+1)^2(x-4)[(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}] \geq 0,$$

$$\therefore x \leq 1 \text{ 或 } 2 \leq x \leq 3 \text{ 或 } x \geq 4.$$



16. 設 x 是實數, 若不等式 $ax^3 + bx^2 + cx - 12 \leq 0$ 的解為 $x \geq 4$ 或 $-3 \leq x \leq 1$, 則三元序組 $(a, b, c) =$ _____.

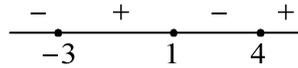
解答 $(-1, 2, 11)$

解析 參考下圖可知 $x \geq 4$ 或 $-3 \leq x \leq 1$ 是 $(x-4)(x+3)(x-1) \geq 0$ 的解, 整理得 $-x^3 + 2x^2 + 11x - 12 \leq 0$,

上式與 $ax^3 + bx^2 + cx - 12 \leq 0$ 表同一不等式,

$$\therefore \frac{a}{-1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{11} = \frac{-12}{-12},$$

$\therefore a = -1, b = 2, c = 11, \therefore$ 序組 $(a, b, c) = (-1, 2, 11)$.

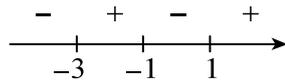


17.不等式: $(x^2 + 2x + 5)(x^2 + 4x + 3)(x - 1)^3(x + 2)^2 > 0$ 的解為_____.

解答 $-3 < x < -1, x > 1, x \neq -2$

解析 $\because D = 2^2 - 4 \times 1 \times 5 < 0, \therefore x^2 + 2x + 5$ 恆正

$$\begin{aligned} \text{原式} &\Rightarrow (x+1)(x+3)(x-1)^3(x+2)^2 > 0 \\ &\Rightarrow (x+1)(x+3)(x-1) > 0, x \neq 1, x \neq -2 \\ &\Rightarrow -3 < x < -1, x > 1, x \neq -2. \end{aligned}$$



18.已知整係數多項式為 $f(x) = x^4 + x^3 + ax^2 + bx + 6$, 若 $f(x) = 0$ 有四個相異的有理根, 且實數 k 滿足 $f(k) < 0$, 則 k 的範圍為_____.

解答 $-3 < k < -1$ 或 $1 < k < 2$

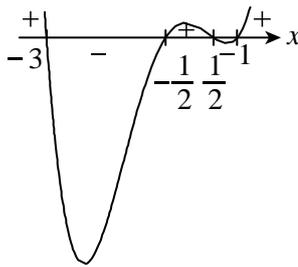
解析 有理根只有 $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ 共 8 種可能,

$$\begin{aligned} \because \text{相異, 積為 } 6, \text{ 和為 } -1, \therefore \text{此四根為 } 1, -1, 2, -3 \\ \Rightarrow f(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+3) \Rightarrow f(k) = (k-1)(k+1)(k-2)(k+3) < 0 \\ \Rightarrow -3 < k < -1 \text{ 或 } 1 < k < 2. \end{aligned}$$

19.解 $(2x^2 + 5x - 3)(-2x^2 + x + 1) \geq 0$, 得 x 的範圍為_____.

解答 $-3 \leq x \leq -\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

解析 原式 $\Rightarrow (2x^2 + 5x - 3)(2x^2 - x - 1) \leq 0 \Rightarrow (x+3)(2x-1)(x-1)(2x+1) \leq 0$
 $\Rightarrow -3 \leq x \leq -\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.



20.解 $(x^2 - x)^2 - 5(x^2 - x) - 6 \leq 0$, 得 x 的範圍為_____.

解答 $-2 \leq x \leq 3$

解析 原式 $\Rightarrow (x^2 - x - 6)(x^2 - x + 1) \leq 0 \Rightarrow (x-3)(x+2)(x^2 - x + 1) \leq 0$
 $x^2 - x + 1$ 恆正 ($\because D < 0$)
 \therefore 僅考慮 $(x-3)(x+2) \leq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 3$.

21.解不等式 $(x+1)^{2010}(x-2)^{2011}(x-5)^{2013} < 0$, 得 x 的範圍為_____.

解答 $2 < x < 5$

解析 ① $x+1=0, 0 < 0$ (不合) $\therefore x \neq -1$

② $x+1 \neq 0$, 僅需考慮 $(x-2)(x-5) < 0$ 即可 $\Rightarrow 2 < x < 5$

由①②知 $2 < x < 5$.

22. 設 x 是實數, 則不等式 $\frac{3}{x-2} \geq x$ 的解為_____.

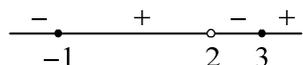
解答 $x \leq -1$ 或 $2 < x \leq 3$

解析 $\frac{3}{x-2} \geq x \Rightarrow \frac{3}{x-2} - x \geq 0 \Rightarrow \frac{3-x(x-2)}{x-2} \geq 0$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{x-2} \leq 0 \Rightarrow (x^2 - 2x - 3)(x-2) \leq 0 \quad (\text{但 } x \neq 2)$$

$$\Rightarrow (x-3)(x+1)(x-2) \leq 0 \quad (\text{但 } x \neq 2)$$

$$\Rightarrow x \leq -1 \text{ 或 } 2 < x \leq 3.$$



23. 設 x 是實數, 則不等式 $1 < \frac{x}{2x+1} < 2$ 的解為_____.

解答 $-1 < x < -\frac{2}{3}$

解析 $(\frac{x}{2x+1} - 1)(\frac{x}{2x+1} - 2) < 0 \Rightarrow (\frac{-x-1}{2x+1})(\frac{-3x-2}{2x+1}) < 0$

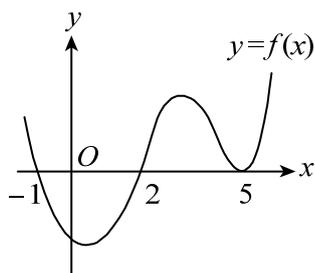
$$\Rightarrow (x+1)(3x+2) < 0, \quad x \neq -\frac{1}{2}, \quad \therefore -1 < x < -\frac{2}{3}.$$

24. 已知多項式函數 $y=f(x)$ 的函數圖形如下, 求

(1) 方程式 $f(x)=0$ 的實根為_____.

(2) 不等式 $f(x) > 0$ 的解為_____.

(3) 不等式 $f(x) \leq 0$ 的解為_____.



解答 (1) $-1, 2, 5$; (2) $x > 5$ 或 $2 < x < 5$ 或 $x < -1$; (3) $-1 \leq x \leq 2$ 或 $x = 5$

解析 (1) $y=f(x)$ 的函數圖形與 x 軸交於三點, 分別為 $(-1, 0)$, $(2, 0)$, $(5, 0)$,

所以 $-1, 2, 5$ 為方程式 $f(x)=0$ 的三個實根.

(2) $y=f(x)$ 的函數圖形在 y 軸上方的有三個部分, 其 x 的範圍分別為 $x > 5$, $2 < x < 5$ 及 $x < -1$.

故 $f(x) > 0$ 的解為 $x > 5$ 或 $2 < x < 5$ 或 $x < -1$.

(3) $y=f(x)$ 的函數圖形在 y 軸下方的有一個部分, 其 x 的範圍為 $-1 < x < 2$,

因此 $f(x) < 0$ 的解為 $-1 < x < 2$. 又 $x = -1, 2, 5$ 均使 $f(x) = 0$ 成立,

故 $f(x) \leq 0$ 的解為 $-1 \leq x \leq 2$ 或 $x = 5$.

25. 設 m 是實數，當直線 $y = kx - 1$ 與拋物線 $y = (m + 2)x^2 + mx$ 沒有交點，得 m 的範圍為 $-1 < m < 7$ ($m \neq -2$)，則實數 k 之值為_____ .

解答 1

解析 將 $y = kx - 1$ 代入 $y = (m + 2)x^2 + mx$

$$kx - 1 = (m + 2)x^2 + mx \Rightarrow (m + 2)x^2 + (m - k)x + 1 = 0$$

$$D = (m - k)^2 - 4(m + 2) < 0 \Rightarrow m^2 + (-2k - 4)m + k^2 - 8 < 0$$

$$\text{與 } -1 < m < 7, \text{ 即 } (m - 7)(m + 1) < 0 \text{ 比較} \Rightarrow m^2 - 6m - 7 < 0 \quad \begin{cases} -2k - 4 = -6 \\ k^2 - 8 = -7 \end{cases} \Rightarrow k = 1 .$$

26. 若 $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 13x^2 - 10x - 8 = 0$ 有一根為 $\frac{-1 + \sqrt{23}i}{6}$ ，則不等式 $3x^4 - 8x^3 - 13x^2 - 10x - 8 > 0$

的解為_____ .

解答 $x > 4$ 或 $x < -1$

解析 $x = \frac{-1 + \sqrt{23}i}{6} \Rightarrow (6x + 1)^2 = (\sqrt{23}i)^2 \Rightarrow 3x^2 + x + 2 = 0$

$$\therefore f(x) = (3x^2 + x + 2)(x^2 - 3x - 4)$$

$$\text{則 } f(x) > 0 \Rightarrow (3x^2 + x + 2)(x - 4)(x + 1) > 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 1) > 0 \Rightarrow x > 4 \text{ 或 } x < -1 .$$

27. 若不等式 $\frac{(x-1)(2x^2+3x+4)}{(x+3)(x^2-3x+2)} \leq 0$ ，求 x 的範圍_____ .

解答 $-3 < x < 2$ ，但 $x \neq 1$

解析 原式 $\Rightarrow (x - 1)^2(x + 3)(x - 2) \leq 0, x \neq -3, 1, 2$

$$\Rightarrow (x + 3)(x - 2) \leq 0, x \neq -3, 1, 2$$

$$\Rightarrow -3 < x < 2, \text{ 但 } x \neq 1 .$$