

高雄市明誠中學 高一數學平時測驗				日期：101.11.08	
範圍	2-3 方程式(B)	班級	一年___班	姓名	
		座號			

一、填充題 (每題 10 分)

1. 化簡 $7i^{2013} + (2-3i)(5+3i) + \frac{5+10i}{3-4i} =$ _____ .

解答 18

解析 原式 = $7(i^4)^{503}i + 10 + 6i - 15i - 9i^2 + \frac{(5+10i)(3+4i)}{9+16}$

$$= (19-2i) + \frac{1}{25}(15+20i+30i-40) = (19-2i) + \frac{1}{25}(-25+50i) = (19-2i) - 1 + 2i = 18 .$$

2. 設 a, b 為實數，若 $\frac{63-36i}{a+bi} = 36+63i$ ，求數對 $(a, b) =$ _____ .

解答 $(0, -1)$

解析 $a+bi = \frac{63-36i}{36+63i} = \frac{7-4i}{4+7i} \times \frac{4-7i}{4-7i} = \frac{(28-28)+(-16-49)i}{4^2+7^2} = -i$ ， $\therefore (a, b) = (0, -1)$.

3. 設 x, y 為實數，已知 $(3+2i)x + (-2+2i)y = 17+3i$ ，求 $(x, y) =$ _____ .

解答 $(4, -\frac{5}{2})$

解析 $(3+2i)x + (-2+2i)y = (3x-2y) + (2x+2y)i = 17+3i$,

$$\begin{cases} 3x-2y=17 \\ 2x+2y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-\frac{5}{2} \end{cases} . \therefore (x, y) = (4, -\frac{5}{2}) .$$

4. 設 z 為複數，且 z 之實部為 1，而 $\frac{1}{z}$ 之虛部為 $\frac{1}{2}$ ，則 $z =$ _____ .

解答 $1-i$

解析 設 $z = 1+bi$ (b 為實數)，則 $\frac{1}{z} = \frac{1}{1+bi} = \frac{1}{1+bi} \times \frac{1-bi}{1-bi} = \frac{1-bi}{1+b^2}$

$$\therefore \frac{-b}{1+b^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1+b^2 = -2b \Rightarrow b^2+2b+1=0 \Rightarrow (b+1)^2=0 \Rightarrow b=-1, \therefore z=1-i .$$

5. 若 $2+i$ 為方程式 $x^2+ax+1=0$ 的一根，求

(1) a 的值為 _____，(2) 且另一根為 _____ .

解答 (1) $a = \frac{-12-4i}{5}$; (2) $\frac{2-i}{5}$

解析 將 $2+i$ 代入方程式，得 $(2+i)^2 + a(2+i) + 1 = 0$,

$$\Rightarrow (2+i)a + 4 + 4i = 0 \Rightarrow a = -\frac{4+4i}{2+i} = -\frac{(4+4i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{-12-4i}{5} ,$$

$$\text{設另一根為 } \beta, \Rightarrow (2+i)\beta = 1 \Rightarrow \beta = \frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{5} .$$

6. 設 $f(x) = 3x^3 - 14x^2 + cx - 31$, c 為某一整數, 若 $f(2+3i) = 1+9i$ ($i = \sqrt{-1}$), 則 $f(2-3i) =$

解答 $1-9i$

解析 $\because f(x)$ 是實係數多項式, $\therefore f(2-3i) = \overline{f(2+3i)} = \overline{1+9i} = 1-9i$.

7. x, y 皆為實數, $i = \sqrt{-1}$, 若 $(2x+y-7) + (-x+2y+2)i$ 為實數, 而 $(-x+3y-1) + (x+y-1)i$ 為純虛數, 則 $x+y =$ _____ .

解答 11

解析 $\begin{cases} -x+2y+2=0 \\ -x+3y-1=0 \end{cases} \Rightarrow x=8, y=3 \quad x+y=8+3=11$.

8. b 是實數, 若複數 $\frac{1+bi}{2-i}$ 的實部與虛部相等, 則 $b =$ _____ .

解答 $\frac{1}{3}$

解析 $\frac{1+bi}{2-i} = \frac{(1+bi)(2+i)}{2^2+1^2} = \frac{1}{5}(2+i+2bi-b) = \frac{2-b}{5} + \frac{1+2b}{5}i$

\because 實部 = 虛部 $\therefore \frac{2-b}{5} = \frac{1+2b}{5} \quad b = \frac{1}{3}$.

9. 設 $g(x)$ 為 x 的實係數多項式, 且 $g(x-1) = f(x+2)$, 又知 $g(1-2i) = 7+3i$ ($i = \sqrt{-1}$), 則 $f(4+2i) =$ _____ .

解答 $7-3i$

解析 $f(4+2i) = f((2+2i)+2) = g((2+2i)-1) = g(1+2i)$
 $= g(1-2i) = g(1-2i) = 7+3i = 7-3i$.

10. 設 z 為複數, 若 $z^2 = 8+6i$, 則 $z =$ _____ .

解答 $3+i$ 或 $-3-i$

解析 設 $z = a+bi$ (a, b 為實數), 則 $z^2 = (a+bi)^2 = 8+6i \Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 8 \\ 2ab = 6 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 1 \end{cases}$, 又 a, b 同號 $\Rightarrow a=3, b=1$ 或 $a=-3, b=-1$.

(1) $a=3, b=1$ 時, 所求 = $3+i$. (2) $a=-3, b=-1$ 時, 所求 = $-3-i$.

11. 已知實係數方程式 $x^4 - 3x^3 + ax^2 + 2x + b = 0$ 有一根為 $1-3i$, 求

(1) 數對 $(a, b) =$ _____ . (2) 此方程式其他的解 _____ .

解答 (1) $(6, -60)$; (2) $1+3i, 3, -2$

解析 設 $f(x) = x^4 - 3x^3 + ax^2 + 2x + b$, 因 $1-3i$ 是此實係數式方程式 $f(x) = 0$ 的一根, 所以 $1+3i$ 也是 $f(x) = 0$ 的一根. 故 $x - (1-3i)$ 及 $x - (1+3i)$ 都是 $f(x)$ 因式, 即

$[x - (1 - 3i)][x - (1 + 3i)] = (x - 1)^2 - (3i)^2 = x^2 - 2x + 10$ 是 $f(x)$ 因式 .

用除法計算 $f(x) \div (x^2 - 2x + 10)$:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 1 \quad -1 \quad - \quad 6 \\
 1-2+10 \overline{) 1 \quad -3 \quad + \quad a \quad + 2 \quad + b} \\
 \underline{1 \quad -2 \quad + \quad 10} \\
 \quad -1 \quad + (a-10) \quad + 2 \\
 \quad -1 \quad + \quad 2 \quad -10 \\
 \hline
 \quad (a-12) \quad +12 \quad + b \\
 \quad - \quad 6 \quad +12 \quad -60 \\
 \hline
 \quad 0
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\therefore \begin{cases} a-12+6=0 \\ b+60=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=-60 \end{cases} \Rightarrow (a,b) = (6, -60) .$$

$$\text{故 } (x^2 - 2x + 10)(x^2 - x - 6) = 0 \Rightarrow (x^2 - 2x + 10)(x - 3)(x + 2) = 0 \\ \Rightarrow x = 1 \pm 3i \text{ 或 } x = 3 \text{ 或 } x = -2,$$

即其他之解為 $1 + 3i$, 3 , -2 .

12. 設 $x = 3 + \sqrt{3}i$, $y = 3 - \sqrt{3}i$, 則 $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 = \underline{\hspace{2cm}}$.

解答 -72

解析 $x + y = 6$, $xy = 9 - (\sqrt{3}i)^2 = 12 \cdots ①$

所求 $= (x^3 + y^3) - (x^2y + xy^2) = [(x + y)^3 - 3xy(x + y)] - xy(x + y) \cdots ②$; ①代入②即可.

13. 設整係數多項方程式 $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 9 = 0$ 有 4 個相異的有理根, 則序組 $(a,b,c) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解答 $(0, -10, 0)$

解析 此方程式有 4 個相異的有理根, 即多項式有 4 個相異的一次因式 $x - n$.

因 n 是 9 的因數, 故一次因式可能為 $x - 1, x + 1, x - 3, x + 3, x - 9, x + 9$

又常數項 $9 = (-1) \times 1 \times (-3) \times 3$ 是上述 4 個相異 n 值的唯一組合

$$\therefore x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 9 = (x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3) = x^4 - 10x^2 + 9$$

即 $a = 0, b = -10, c = 0$.

14. 設 p, q 是自然數, 且 $x^5 - 2px^4 + x^3 - qx^2 + x + 2 = 0$ 有整數根, 則數對 $(p, q) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解答 $(1, 3)$ 或 $(2, 1)$

解析 由牛頓定理知: 方程式的整數根可能為 $x = \pm 1, \pm 2$

(1) 若 $x = 1$, 則 $1 - 2p + 1 - q + 1 + 2 = 0 \Rightarrow 2p + q = 5 \Rightarrow p = 1, q = 3$ 或 $p = 2, q = 1$.

(2) 若 $x = -1$, 則 $-1 - 2p - 1 - q - 1 + 2 = 0 \Rightarrow 2p + q + 1 = 0$, 無解.

(3) 若 $x = 2$, 則 $32 - 32p + 8 - 4q + 4 = 0 \Rightarrow p = 1, q = 3$.

(4) 若 $x = -2$, 則 $-32 - 32p - 8 - 4q = 0 \Rightarrow 32p + 4q + 40 = 0$, 無解.

15. 設 $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, 則 $z^2 + z^4 + z^6 + \cdots + z^{200} = \underline{\hspace{2cm}}$.

解答 0

解析 $\because z = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \quad \therefore z^2 = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{2i}{2} = i$

所求 $= i + i^2 + i^3 + \dots + i^{100} = (i + i^2 + i^3 + i^4) + (i^5 + i^6 + i^7 + i^8) + \dots = 0$

16. 若方程式 $x^4 - kx^2 + k^2x + 1 = 0$ 在 -1 與 0 之間有奇數個實根，則實數 k 的範圍為_____。

解答 $k > 1$ 或 $k < -2$

解析 設 $f(x) = x^4 - kx^2 + k^2x + 1$ ，則 $f(-1) \times f(0) < 0$

$\therefore (1 - k - k^2 + 1) < 0 \Rightarrow k^2 + k - 2 > 0 \Rightarrow (k+2)(k-1) > 0 \Rightarrow k > 1$ 或 $k < -2$ 。

17. 令 $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ， a, b, c 為實數，則下列各題 a, b, c 之關係

(1) 若 $a + b\omega = 0$ ，則_____。(2) 若 $a + b\omega + c\omega^2 = 0$ ，則_____。

解答 (1) $a = b = 0$; (2) $a = b = c$

解析 (1) $a + b\omega = a + b\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) = \left(a - \frac{b}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}bi = 0 \Rightarrow \begin{cases} a - \frac{b}{2} = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}b = 0 \end{cases} \Rightarrow b = 0$ 且 $a = 0$ 。

(2) $\because \omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \Rightarrow \begin{cases} \omega^3 = 1 \\ 1 + \omega + \omega^2 = 0 \end{cases}$

$\therefore a + b\omega + c\omega^2 = 0 \Rightarrow a + b \times \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} + c \cdot \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = 0$

$\Rightarrow \frac{2a-b-c}{2} + \frac{(b-c)\sqrt{3}}{2}i = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2a-b-c=0 \\ b-c=0 \end{cases} \therefore a = b = c$

18. 令 $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ，則 $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)$ 的值为_____。

解答 9

解析 $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \Rightarrow \begin{cases} \omega^3 = 1 \\ 1 + \omega + \omega^2 = 0 \end{cases}$

所求 $= (1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega)(1-\omega^2)$
 $= [1 - (\omega^2 + \omega) + \omega^3]^2 = [1 - (-1) + 1]^2 = 9$ 。

19. 設 k 為實數，且 $x^2 + (k+2)x + (k+5) = 0$ 有一個正根及一個負根，則 k 的範圍為_____。

解答 $k < -5$

解析 方程式有相異兩實根 \Rightarrow 判別式 $> 0 \Rightarrow (k+2)^2 - 4(k+5) > 0$

$\Rightarrow k^2 - 16 > 0 \Rightarrow (k-4)(k+4) > 0 \Rightarrow k > 4, k < -4 \dots \textcircled{1}$

又兩根積 $< 0 \Rightarrow k+5 < 0 \dots \textcircled{2}$

由 $\textcircled{1}\textcircled{2}$ 得 $k < -5$ 。

20. 設 α , β 為方程式 $2x^2 + x + 1 = 0$ 之二根, 則 $\frac{\beta}{\alpha+1} + \frac{\alpha}{\beta+1} =$ _____ .

解答 $-\frac{5}{4}$

解析 $\alpha + \beta = -\frac{1}{2}, \alpha\beta = \frac{1}{2}$

$$2\alpha^2 + \alpha + 1 = 0, 2\beta^2 + \beta + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\alpha+1} + \frac{\alpha}{\beta+1} &= \frac{\beta}{-2\alpha^2} + \frac{\alpha}{-2\beta^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\alpha^2} + \frac{\alpha}{\beta^2} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha^2\beta^2} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}{(\alpha\beta)^2} = -\frac{5}{4} . \end{aligned}$$

21. 設 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的二根為 α , β , 則 $\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4 =$ _____ .

解答 48

解析 $\alpha + \beta = -\frac{-3}{1} = 3, \alpha\beta = 1$

$$\begin{aligned} \alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4 &= (\alpha^4 + \beta^4) + \alpha^2\beta^2 = [(\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2] + \alpha^2\beta^2 \\ &= (\alpha^2 + \beta^2)^2 - (\alpha\beta)^2 = [(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta]^2 - (\alpha\beta)^2 \\ &= (3^2 - 2)^2 - 1^2 = 48 . \end{aligned}$$

22. 已知方程式 $x^2 + 5x + 3 = 0$ 之二根為 α , β , 則 $(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2 =$ _____ .

解答 $-5 + 2\sqrt{3}$

解析 由判別式 $= 25 - 12 > 0$ 知: α , β 為實數, 且

$$\alpha + \beta = -5, \alpha\beta = 3 \quad \text{知: } \alpha < 0, \beta < 0, \text{ 此時 } \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} = -\sqrt{\alpha\beta}$$

$$\therefore (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2 = (\sqrt{\alpha})^2 + (\sqrt{\beta})^2 - 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} = \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = -5 + 2\sqrt{3} .$$

23. 設 a, b 為實數, 且 $\frac{a+5i}{1-2i}$ 的共軛複數為 $-\frac{7}{5} + bi$, 則 $a + b =$ _____ .

解答 $\frac{4}{5}$

解析 $\overline{\left(\frac{a+5i}{1-2i}\right)} = \frac{a-5i}{1+2i} = \frac{(a-5i)(1-2i)}{1^2+2^2} = \frac{(a-10) + (-2a-5)i}{5}$

$$\therefore \frac{a-10}{5} = -\frac{7}{5}, \frac{-2a-5}{5} = b \quad a = 3, b = -\frac{11}{5}, \text{ 故 } a + b = 3 + \left(-\frac{11}{5}\right) = \frac{4}{5} .$$

24. 設 $m > 0$, α, β 為 $mx^2 + (3m-5)x - 24 = 0$ 的實根, 若 $|\alpha| : |\beta| = 3 : 2$, 則 $m =$ _____ .

解答 1 或 $\frac{25}{9}$

解析 $\because \alpha\beta = \frac{-24}{m} < 0$ 且 $|\alpha| : |\beta| = 3 : 2$

∴取 $\alpha = 3k$, $\beta = -2k$ (兩數異號), k 為實數

$$\text{則 } 3k + (-2k) = \alpha + \beta = \frac{5-3m}{m} \cdots \textcircled{1}$$

$$3k(-2k) = \alpha\beta = \frac{-24}{m} \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ 代入 } \textcircled{2} \text{ 得 } -6\left(\frac{5-3m}{m}\right)^2 = \frac{-24}{m} \Rightarrow 9m^2 - 34m + 25 = 0 \Rightarrow m = 1 \text{ 或 } \frac{25}{9} .$$

25. 設 $x^2 - x + 1 = 0$ 的兩根為 α, β , 試求以 $\frac{1}{\alpha-1}, \frac{1}{\beta-1}$ 為兩根的二次方程式為_____ .

解答	$x^2 + x + 1 = 0$
----	-------------------

解析	根與係數關係: $\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = 1$
----	---

以 $\frac{1}{\alpha-1}, \frac{1}{\beta-1}$ 為兩根, 則

$$\text{兩根和} = \frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{\beta-1} = \frac{\alpha + \beta - 2}{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1} = -1$$

$$\text{兩根積} = \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{1}{\beta-1} = \frac{1}{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1} = 1 .$$

∴方程式為 $x^2 + x + 1 = 0$.

26. 解方程式之有理根: $2x^4 - 15x^3 + 36x^2 - 18x - 20 = 0$, x 之有理根 = _____ .

解答	$2, -\frac{1}{2}$
----	-------------------

解析	所有可能的一次整係數因式為
----	---------------

$$x \pm 1, x \pm 2, x \pm 4, x \pm 5, x \pm 10, x \pm 20, 2x \pm 1, 2x \pm 5$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & -15 & +36 & -18 & -20 & \\ & +4 & -22 & +28 & +20 & \\ \hline 2 & -11 & +14 & +10 & & +0 \\ & & -1 & +6 & -10 & -\frac{1}{2} \\ \hline 2 & -12 & +20 & +0 & & \\ \hline 1 & -6 & +10 & & & \end{array}$$

$$\therefore \text{原式} = (x-2)(2x+1)(x^2-6x+10) = 0 \quad \text{有理根為 } x = 2, -\frac{1}{2} .$$

27. 設 a, b 為實數. 已知坐標平面上拋物線 $y = x^2 + ax + b$ 與 x 軸交於 P, Q 兩點, 且 $\overline{PQ} = 7$. 若拋物線 $y = x^2 + ax + (b+2)$ 與 x 軸的兩交點為 R, S , 則 $\overline{RS} =$ _____ .

解答	$\sqrt{41}$
----	-------------

解析	設 $P(\alpha, 0), Q(\beta, 0)$, 即 $x^2 + ax + b = 0$ 之兩根為 α, β , 則 $\alpha + \beta = -a, \alpha \cdot \beta = b$,
----	---

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \Rightarrow 7^2 = (-a)^2 - 4b \Rightarrow a^2 - 4b = 49$$

同理, 設 $R(\alpha', 0), S(\beta', 0)$

$$x^2 + ax + (b+2) = 0 \text{ 之二根為 } \alpha', \beta' \Rightarrow \alpha' + \beta' = -a, \alpha' \cdot \beta' = b+2,$$

$$(\alpha' - \beta')^2 = (\alpha' + \beta')^2 - 4\alpha'\beta' = (-a)^2 - 4(b+2) = a^2 - 4b - 8 = 49 - 8 = 41$$

$$\therefore RS = |\alpha' - \beta'| = \sqrt{41} .$$

28. 已知 α, β 為方程式 $2x^2 + 3x - 4 = 0$ 之兩根, 求

(1) $\alpha^2 + \beta^2 =$ _____ (2) $\alpha^3 + \beta^3 =$ _____ (3) $(2\alpha + 3)^2 + (2\beta + 3)^2 =$ _____ .

解答 (1) $\frac{25}{4}$; (2) $-\frac{99}{8}$; (3) 25

解析 $\alpha + \beta = -\frac{3}{2}, \alpha\beta = -2$

$$(1) \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 2(-2) = \frac{25}{4}$$

$$(2) \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \times (-2) \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{99}{8}$$

$$(3) \because 2\alpha^2 + 3\alpha - 4 = 0 \Rightarrow 2\alpha + 3 = \frac{4}{\alpha}; \quad 2\beta^2 + 3\beta - 4 = 0 \Rightarrow 2\beta + 3 = \frac{4}{\beta}$$

$$\therefore (2\alpha + 3)^2 + (2\beta + 3)^2 = \left(\frac{4}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{4}{\beta}\right)^2 = \frac{16(\alpha^2 + \beta^2)}{(\alpha\beta)^2} = \frac{16 \times \frac{25}{4}}{(-2)^2} = 25 .$$

29. 設 a 為整數, 若 $x^2 + (3a - 1)x + (7a - 6) = 0$ 有虛根, 則 $a =$ _____ .

解答 2

解析 判別式 < 0 得 $(3a - 1)^2 - 4(7a - 6) < 0, 9a^2 - 34a + 25 < 0$

$$\therefore (a - 1)(9a - 25) < 0, 1 < a < \frac{25}{9}, \text{ 又 } a \text{ 為整數, } \therefore a = 2 .$$

30. 設 a, b 為實數, 若 $1 - 3i$ 為方程式 $x^2 + ax + bi = 0$ 之一根, 求 $(a, b) =$ _____ .

解答 (8, 30)

解析 方程式 $x^2 + ax + bi = 0$ 不是實係數方程式, $1 + 3i$ 未必為方程式的另一根 .

將 $1 - 3i$ 代入 $x^2 + ax + bi = 0$, 得 $(1 - 3i)^2 + a(1 - 3i) + bi = 0$.

整理得 $(-8 + a) + (-6 - 3a + b)i = 0$, 故 $-8 + a = 0, -6 - 3a + b = 0$,

解得 $a = 8, b = 30$.