高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：101.10.31					
範圍	2-3 方程式(A)	班級	一年____班	姓名	
		座號			

一、填充題 (每題 10 分)

1.若 $\alpha=1+i$， $\beta=2-3i$，求

(1) $\alpha+\beta=$____________． (2) $\alpha-\beta=$____________．

(3) $\alpha\beta=$____________． (4) $\dfrac{\alpha}{\beta}=$____________．

解答 (1) $3-2i$;(2) $-1+4i$;(3) $5-i$;(4) $\dfrac{-1+5i}{13}$

解析 (1) $\alpha+\beta=(1+i)+(2-3i)=(1+2)+(1-3)i=3-2i$

(2) $\alpha-\beta=(1+i)-(2-3i)=1+i-2+3i=-1+4i$

(3) $\alpha\beta=(1+i)(2-3i)=2-3i+2i-3i^2=5-i$

(4) $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{1+i}{2-3i}=\dfrac{(1+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\dfrac{2+3i+2i+3i^2}{4-9i^2}=\dfrac{-1+5i}{13}$

2.若 a 與 $a+2$ 為異號的兩實數，且均為方程式 $x^2+|x|+3k=0$ 的解，則 k 之值為____________．

解答 $-\dfrac{2}{3}$

解析 ∵ a 與 $a+2$ 異號 ∴ $a<0$，$a+2>0$

∵ a 與 $a+2$ 為方程式 $x^2+|x|+3k=0$ 之二根

∴ $a^2+|a|+3k=0 \Rightarrow a^2-a+3k=0$……①

$(a+2)^2+|a+2|+3k=0 \Rightarrow (a+2)^2+(a+2)+3k=0 \Rightarrow a^2+5a+6+3k=0$……②

② − ①得 $6a+6=0$ ∴ $a=-1$，代入①得 $2+3k=0$ ∴ $k=-\dfrac{2}{3}$

3.複數 $(-2+\sqrt{3}\,i)^4$ 的(1)實部為____________． (2)虛部為____________．

解答 (1) -47;(2) $-8\sqrt{3}$

解析 $(-2+\sqrt{3}\,i)^4=(4-4\sqrt{3}\,i-3)^2=1-8\sqrt{3}\,i-48=-47-8\sqrt{3}\,I$，實部為 -47，虛部為 $-8\sqrt{3}$

4.化簡 $\dfrac{(3-\sqrt{-16})\cdot(-1+\sqrt{-25})}{2+\sqrt{-9}}$ 為標準式得____________．

解答 $7-i$

解析 $\dfrac{(3-\sqrt{-16})\cdot(-1+\sqrt{-25})}{2+\sqrt{-9}}=\dfrac{(3-4i)(-1+5i)}{2+3i}$

$=\dfrac{(-3+20)+(4+15)i}{2+3i}=\dfrac{17+19i}{2+3i}=\dfrac{(17+19i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\dfrac{(34+57)+(38-51)i}{4+9}=\dfrac{91-13i}{13}=7-i$

5.x，$y\in\boldsymbol{R}$，若 $\dfrac{1+3i}{x+yi}=1+i$，則數對 $(x,y)=$____________．

解答 (2，1)

解析 $\because \quad \dfrac{1+3i}{x+yi}=1+i \quad \therefore \quad x+yi=\dfrac{1+3i}{1+i}=\dfrac{(1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{4+2i}{2}=2+i$， $\because x=2$，$y=1$

6.設 a 為實數，若方程式 $x^2-(a+i)x+2+2i=0$ 有一實根，試求 a 的值為____________ .

解答 3

解析 設實根為 α，則 $\alpha^2-(a+i)\alpha+2+2i=0 \quad \Rightarrow \quad (\alpha^2-a\alpha+2)+(-\alpha+2)i=0$

解 $\begin{cases}\alpha^2-a\alpha+2=0\\ -\alpha+2=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}a=3\\ \alpha=2\end{cases}$

7.設 $z=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$，則 $1+z^{88}+\sqrt{2}\,z^{1999}=$____________ .

解答 $3-i$

解析 $\because \quad z^2=(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}})^2=\dfrac{2i}{2}=i \quad \therefore \quad z^{88}=(z^2)^{44}=1$

$z^{1999}=z^{1998}\cdot z=(z^2)^{999}\cdot z=(i)^{999}\cdot z=i^{996}\cdot i^3\cdot z=(i^4)^{249}\cdot(-i)z=-iz$

故 $1+z^{88}+\sqrt{2}\,z^{1999}=1+1+\sqrt{2}\,(-i)\cdot\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}=2-i(1+i)=2-i+1=3-i$

8.設 $z_1=2+4i$，$z_2=3+i$，試求 $\dfrac{z_1}{z_2}$ 的共軛複數為____________ .

解答 $1-i$

解析 $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{2+4i}{3+i}=\dfrac{(2+4i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\dfrac{10+10i}{9-(-1)}=1+i$，所求$=\overline{1+i}=1-i$

9.設 $i=\sqrt{-1}$，若 $1-i$ 為 $x^2-cx+1=0$ 之一根，則複數 $c=$____________ .（以 $a+bi$ 的形式表示）

解答 $\dfrac{3-i}{2}$

解析 $\because \quad 1-i$ 為 $x^2-cx+1=0$ 之一根 $\quad \therefore \quad (1-i)^2-c(1-i)+1=0$

$\Rightarrow \quad 1-2i+i^2-c(1-i)+1=0 \quad \Rightarrow \quad c(1-i)=1-2i$

$\Rightarrow \quad c=\dfrac{1-2i}{1-i}=\dfrac{(1-2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1+i-2i-2i^2}{1-i^2}=\dfrac{1-i+2}{1+1}=\dfrac{3-i}{2}$

10.設複數 z 的實數部分為正，且滿足 $z^2=3-4i$，$i=\sqrt{-1}$，$z=$____________ .

解答 $2-i$

解析 SOL 一

設 $z=a+bi$，a，$b\in\boldsymbol{R}$ 且 $a>0$，$z^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi=3-4i$

$\Rightarrow \quad \begin{cases}a^2-b^2=3 & \cdots\cdots ① \\ ab=-2 & \cdots\cdots ②\end{cases}$ 由②知 $b=\dfrac{-2}{a}$ 代入①

$a^2-(\dfrac{-2}{a})^2=3 \quad \Rightarrow \quad a^4-3a^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad (a^2-4)(a^2+1)=0$

$\therefore \quad a=2 \quad \Rightarrow \quad b=-1 \quad \Rightarrow \quad z=a+bi=2-i$

SOL 二

設 $z=a+bi$，$z^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi=3-4i$

又 $|(a+bi)^2|=|3-4i| \Rightarrow (\sqrt{a^2+b^2})^2=\sqrt{3^2+(-4)^2} \Rightarrow a^2+b^2=5$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2-b^2=3 \text{........①} \\ ab=-\ 2 \text{...........②} \\ a^2+b^2=5 \text{........③} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=4 \\ b^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\pm 2 \\ b=\mp 1 \end{cases} \Rightarrow z=2-i;\quad -2+i$$

a，$b \in \boldsymbol{R}$ 且 $a>0 \Rightarrow z=2-i$

11.設 $a \in \boldsymbol{R}$，若二次方程式 $x^2-ax-a+8=0$ 有相等實根，則 a 為____________ .

解答　4 或 -8

解析　$a \in \boldsymbol{R}$，$x^2-ax-a+8=0$ 有相等實根，則 $D=(-a)^2-4(-a+8)=0 \quad \Rightarrow \quad a^2+4a-32=0$

$\Rightarrow \quad (a-4)(a+8)=0 \quad \Rightarrow \quad a=4$ 或 -8

12.設 a，$b \in \boldsymbol{R}$ 且$[(a+1)-4i]+[5+(b-2)i]=2+5i$，則$\overline{a+bi}=$____________ .

解答　$-4-11i$

解析　$[(a+1)-4i]+[5+(b-2)i]=2+5i \quad \Rightarrow \quad (a+1+5)+(-4+b-2)i=2+5i$

$\Rightarrow \quad (a+6)+(b-6)\,i=2+5i \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a+6=2 \\ b-6=5 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{cases} a=-4 \\ b=11 \end{cases}$

$\therefore \quad \overline{a+bi}=\overline{-4+11i}=-4-11i$

13.設 $-2-i$ 是實係數方程式 $ax^3-11x+b=0$ 的一根，則$(a，b)=$____________ .

解答　$(1，-20)$

解析　$\because \quad -2-i$ 是實係數方程式 $ax^3-11x+b=0$ 之一根 $\quad \Rightarrow \quad -2+i$ 亦為其根

$[x-(-2-i)][x-(-2+i)]$

$=x^2-(-2+i)\,x-(-2-i)\,x+4+1=x^2+4x+5 \mid ax^3-11x+b$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{r|l} & a-4a \\ \hline 1+4+5 & a+\ \ 0-11 \qquad\quad +b \\ & a+4a+5a \\ \hline & -4a-(11+5a)+b \\ & -4a \qquad -16a-20a \\ \hline & (-11+11a)+(b+20a) \end{array}$$

$\Rightarrow \quad \begin{cases} -11+11a=0 \cdots\cdots ① \\ b+20a=0 \quad \cdots\cdots ② \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a=1，b=-20$

14.設 $m,k \in \boldsymbol{Q}, m \neq 0$,且方程式 $2mx^2-3mx+2x+m+k=0$ 之根為有理數,則有理數 $k=$____________.

解答　-1 或 -2

解析　$\because \quad$ 方程式 $2mx^2-3mx+2x+m+k=0$ 之根為有理數

$\therefore \quad (-3m+2)^2-4 \cdot 2m(m+k)=9m^2-12m+4-8m^2-8mk$

$=m^2-2(6+4k)m+4$ 為完全平方式

$\Rightarrow \quad (6+4k)^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad (6+4k+2)(6+4k-2)=0 \Rightarrow \quad (k+2)(k+1)=0$

$\therefore \quad k=-1$ 或 $k=-2$

15.化簡 $\dfrac{5i^5+4i^3+1}{8i^9-5i-3}=$____________ .

解答　$-\dfrac{i}{3}$

解析　原式 $=\dfrac{5i-4i+1}{8i-5i-3}=\dfrac{1+i}{-3+3i}=\dfrac{(1+i)(-3-3i)}{(-3+3i)(-3-3i)}=\dfrac{-3-3i-3i-3i^2}{9-(9i^2)}=\dfrac{-6i}{18}=-\dfrac{i}{3}$

16.設 x，y 是實數，若 $(1+i)(x+2y)-(3-2i)(x-y)=8+3i$，求　(1) $x=$_________ . (2) $y=$__________ .

解答 (1) $x=1$;(2) $y=2$

解析 左式 $=x+2y+xi+2yi-(3x-3y-2xi+2yi)=(-2x+5y)+(3x)i=8+3i$

$\therefore \begin{cases}-2x+5y=8\\ 3x=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$

17.設 $x^2-2x-k=0$，無實數解，試求 k 範圍____________ .

解答 $k<-1$

解析 $D<0 \quad\Rightarrow\quad 2^2+4k<0 \quad\Rightarrow\quad k<-1$

18.令 $(x^2+2x)^2-3(x^2+2x+1)-1=0$，則 $x=$____________ .

解答 $-1\pm\sqrt{5}$ 或 -1

解析 設 $x^2+2x=A \quad\Rightarrow$ 原式為 $A^2-3(A+1)-1=0 \quad\Rightarrow\quad A=4$ 或 -1

$\Rightarrow\quad x^2+2x=4$ 或 $x^2+2x=-1 \quad\Rightarrow\quad x=-1\pm\sqrt{5}$ 或 -1

19. $f(x)$，$g(x)$ 為實係數多項式，若 $f(1+2i)=3-4i$，$g(3-4i)=1+2i$，求 $f(1-2i)\times g(3+4i)=$________ .

解答 $11-2i$

解析 $f(1-2i)\times g(3+4i)=f(\overline{1+2i})\times g(\overline{3-4i})=\overline{f(1+2i)}\times\overline{g(3-4i)}$

$=\overline{(3-4i)}\times\overline{(1+2i)}=(3+4i)(1-2i)=11-2i$

20.化簡 $\dfrac{2+i}{3+4i}+\overline{(\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{5}i)}=$____________ . .

解答 1

解析 $\dfrac{(2+i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}+(\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{5}i)=\dfrac{10-5i}{25}+\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{5}i=(\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}i)+\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{5}i=1$.

21.a，b 為實數，$\dfrac{1}{4+2i}+\dfrac{1}{a+bi}=\dfrac{2}{5}$，則數對$(a，b)=$____________ .

解答 $(4,-2)$

解析

$$\frac{1}{4+2i}+\frac{1}{a+bi}=\frac{2}{5}\Rightarrow\frac{1}{a+bi}=\frac{2}{5}-\frac{1}{4+2i}=\frac{2}{5}-\frac{1}{4+2i}\ .$$

$$=\frac{2(4+2i)-5}{5(4+2i)}=\frac{3+4i}{5(4+2i)}$$

$$\Rightarrow a+bi=\frac{5(4+2i)}{3+4i}=\frac{5(4+2i)(3-4i)}{3^2+4^2}=\frac{(12+8)+(6-16)i}{5}=4-2i\Rightarrow a=4,\quad b=-2$$