

高雄市明誠中學 高一數學平時測驗				日期：101.10.24	
範圍	2-2 多項式四則運算(B)	班級	一年__班	姓名	
		座號			

一、填充題 (每題 10 分)

1. 多項式 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)$ 展開後，按降冪排列為 $a_8x^8 + a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ，求

(1) 係數 a_7 的值為_____。(2) $f(x)$ 的常數項為_____。(3) $f(x)$ 的各項係數和為_____。

解答 (1) -36 (2) 40320 (3) 0

解析 (1) $a_7 = (-1) + (-2) + (-3) + \dots + (-8) = -36$

(2) $f(x)$ 的常數項為 $f(0) = (-1)(-2)(-3)(-4)(-5)(-6)(-7)(-8) = 40320$

(3) $f(x)$ 的各項係數和為 $f(1) = (1-1)(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)(1-6)(1-7)(1-8) = 0$

2. 多項式 $x^3 - 4x^2 + 5x - 3$ 除以 $f(x)$ 的商式為 $x - 2$ ，餘式為 $2x - 5$ ，則 $f(x) =$ _____。

解答 $x^2 - 2x - 1$

解析 $x^3 - 4x^2 + 5x - 3 = f(x)(x - 2) + 2x - 5 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 3x + 2}{x - 2} = x^2 - 2x - 1$

3. 若 $2x^3 + ax + 10$ 除以 $x^2 - 3x + b$ 的商為 $2x + c$ 餘式 $3x - 2$ ，求 $(a, b, c) =$ _____。

解答 $(-11, 2, 6)$

$$\begin{array}{r}
 2 + 6 \\
 1 - 3 + b \overline{) 2 + 0 + \quad a + \quad 10} \\
 \underline{2 - 6 + \quad 2b} \\
 6 + (a - 2b) + \quad 10 \\
 \underline{6 - \quad 18 + \quad 6b} \\
 (a - 2b + 18) + (10 - 6b)
 \end{array}$$

解析

商為 $2x + 6$ ，餘式 $(a - 2b + 18)x + (10 - 6b) \therefore \begin{cases} c = 6 \\ a - 2b + 18 = 3 \Rightarrow a = -11, b = 2 \\ 10 - 6b = -2 \end{cases}$

4. 設多項式 $f(x)$ 除以 $x^3 + 1$ 的餘式為 $2x^2 + x + 3$ ，求 $f(x)$ 除以 $x^2 - x + 1$ 的餘式為_____。

解答 $3x + 1$

解析 $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$

$$\div (x+1) \left[\begin{array}{l} \frac{f(x)}{(x+1)(x^2-x+1)} \dots\dots 2x^2 + x + 3 \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \text{餘式不變} \\ \frac{f(x)}{x^2-x+1} \dots\dots 2x^2 + x + 3 \end{array} \right.$$

(但不符除法原理，餘式次數小於除式次數)

$$\frac{2x^2 + x + 3}{x^2 - x + 1} \dots\dots 3x + 1, \text{ 故餘式為 } 3x + 1$$

5. 設 $f(x)$ 為一多項式，若 $(x+1)f(x)$ 除以 $x^2 + x + 1$ 的餘式為 $2x - 1$ ，則 $f(x)$ 除以 $x^2 + x + 1$ 的餘式為_____。

解答 $3x + 2$

解析 設 $f(x)$ 被 $x^2 + x + 1$ 除之餘式為 $ax + b$ ，由除法原理知

$$f(x) = (x^2 + x + 1)Q(x) + (ax + b)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (x+1)f(x) &= (x^2+x+1)Q(x)(x+1) + (ax+b)(x+1) \\ &= (x^2+x+1)Q(x)(x+1) + a(x^2+x+1) + bx + (b-a) \\ &= (x^2+x+1)[Q(x)(x+1) + a] + bx + (b-a), \end{aligned}$$

此式表 $(x+1)f(x)$ 除以 x^2+x+1 的餘式為 $bx+(b-a)$,

得 $bx+(b-a)=2x-1$, 故 $b=2$, $a=3$, 所求之餘式為 $ax+b=3x+2$.

6. 設 $f(x)$ 為一多項式, $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, 以 $x - \frac{b}{a}$ 除 $f(x)$ 所得之商式為 $Q(x)$, 餘式為 r , 則以 $x - b$ 除

$f(\frac{x}{a})$ 所得之商式為_____.

解答 $\frac{Q(\frac{x}{a})}{a}$

解析 $\because f(x) = (x - \frac{b}{a})Q(x) + r \quad \therefore f(\frac{x}{a}) = (\frac{x}{a} - \frac{b}{a})Q(\frac{x}{a}) + r = (x - b)\frac{Q(\frac{x}{a})}{a} + r$

故以 $x - b$ 除 $f(\frac{x}{a})$ 所得之商式為 $\frac{Q(\frac{x}{a})}{a}$

7. 設 $f(x)$ 以 $x - \frac{b}{a}$ 除之商為 $q(x)$, 餘式為 r , 則 $xf(x) + 2$ 被 $(ax - b)$ 除之商式為_____.

解答 $\frac{x}{a}q(x) + \frac{r}{a}$

解析 $f(x) = (x - \frac{b}{a})q(x) + r$

$$\begin{aligned} \Rightarrow xf(x) + 2 &= (x - \frac{b}{a})xq(x) + xr + 2 = (ax - b)\frac{x}{a}q(x) + (ax - b)\frac{r}{a} + \frac{br}{a} + 2 \\ &= (ax - b)(\frac{x}{a}q(x) + \frac{r}{a}) + \frac{br}{a} + 2 \end{aligned}$$

$\therefore xf(x) + 2$ 被 $(ax - b)$ 除之商式為 $\frac{x}{a}q(x) + \frac{r}{a}$

8. 以 $x^2 + 2x + 4$ 除 $(x^2 + 3x + 2)^4$ 之餘式為_____.

解答 $-72x - 144$

解析 令 $p = x^2 + 2x + 4 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = p + x - 2$

$$\begin{aligned} (x^2 + 3x + 2)^4 &= [p + (x - 2)]^4 = p^4 + 4p^3(x - 2) + 6p^2(x - 2)^2 + 4p(x - 2)^3 + (x - 2)^4 \\ &= p[p^3 + 4p^2(x - 2) + 6p(x - 2)^2 + 4(x - 2)^3] + x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 \\ x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 &= (x^2 + 2x + 4)(x^2 - 10x + 40) + (-72x - 144) \end{aligned}$$

所求餘式為 $-72x - 144$

9. 設二多項式 $f(x)$, $g(x)$ 其次數均大於 2, 已知 $f(x)$ 與 $g(x)$ 除以 $x^2 - x - 1$ 之餘式分別為 $2x + 1$ 與 $x - 3$, 則(1) $f(x) + g(x)$ 除以 $x^2 - x - 1$ 之餘式為_____.

(2) $2f(x) - 3g(x)$ 除以 $x^2 - x - 1$ 之餘式為_____.

(3) $f(x) \cdot g(x)$ 除以 $x^2 - x - 1$ 之餘式為_____。

解答 (1) $3x - 2$; (2) $x + 11$; (3) $-3x - 1$

解析 由除法定理, 令 $f(x) = (x^2 - x - 1)q_1(x) + 2x + 1$, $g(x) = (x^2 - x - 1)q_2(x) + x - 3$

$$(1) f(x) + g(x) = (x^2 - x - 1)[q_1(x) + q_2(x)] + 3x - 2$$

$\therefore f(x) + g(x)$ 除以 $x^2 - x - 1$ 之餘式為 $3x - 2$

$$(2) 2f(x) - 3g(x) = [2(x^2 - x - 1)q_1(x) + 4x + 2] - [3(x^2 - x - 1)q_2(x) + 3x - 9]$$

$$= (x^2 - x - 1)[2q_1(x) - 3q_2(x)] + x + 11$$

$\therefore 2f(x) - 3g(x)$ 除以 $x^2 - x - 1$ 之餘式為 $x + 11$

$$(3) f(x)g(x) = [(x^2 - x - 1)q_1(x) + 2x + 1][(x^2 - x - 1)q_2(x) + x - 3]$$

$$= (x^2 - x - 1)^2 q_1(x)q_2(x) + (x^2 - x - 1)(x - 3)q_1(x) + (x^2 - x - 1)(2x + 1)q_2(x) + (2x + 1)(x - 3)$$

$$= (x^2 - x - 1)Q(x) + (2x + 1)(x - 3) = (x^2 - x - 1)Q(x) + 2(x^2 - x - 1) - 3x - 1$$

$$= (x^2 - x - 1)[Q(x) + 2] - 3x - 1$$

$\therefore f(x)g(x)$ 除以 $x^2 - x - 1$ 之餘式為 $-3x - 1$

求 $f(x)g(x)$ 除以 $x^2 - x - 1$ 之餘式, 即 $f(x)$ 及 $g(x)$ 除以 $x^2 - x - 1$ 之餘式 $2x + 1$ 與 $x - 3$ 之乘積除以 $x^2 - x - 1$ 之餘式

10. $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 8x + a$, $g(x) = x^2 - 4x + b$, 已知 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的倍式, 則 (1) $a =$ _____. (2) $b =$ _____.

解答 (1) 6; (2) 2

解析 $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 8x + a$ 是 $g(x) = x^2 - 4x + b$ 的倍式, 即 $g(x)$ 整除 $f(x)$, 用綜合除法

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & -5 & -8 & +a & \\ & 8 & +12 & & \\ \hline & 2+3 & 4-2b & a-3b & 4-b \end{array}$$

餘式為 0, 故 $4 - 2b = 0$, $a - 3b = 0$ 得 $b = 2$, $a = 6$

11. 設 $3(x-1)^3 + 4(x-1)^2 + 2 = a(x-1)(x-2)(x+1) + b(x-1)(x-2) + c(x-2) + d$, $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, 則數對 $(a, b, c, d) =$ _____.

解答 (3, 1, 7, 9)

解析

$$\text{令 } x = 2, d = 3 + 4 + 2 = 9$$

$$\text{令 } x = 1, -c + d = 2 \quad \therefore c = 7$$

$$\text{令 } x = -1 \quad \therefore 6b - 3c + d = -6 \quad \therefore b = 1$$

$$\text{令 } x = 0 \quad \therefore 2a + 2b - 2c + d = 3 \quad \therefore a = 3$$

12. 若多項式 $f(x) = 8x^3 + ax^2 + bx + 5$ 被 $2x^2 + x - 1$ 除的餘式為 $4x + 1$, 則

(1) $a + b =$ _____ . (2) $f(x)$ 被 $2x - 1$ 除的餘式為_____ .

(3) 改寫 $f(x) = a(2x - 1)^3 + b(2x - 1)^2 + c(2x - 1) + d$, 則序對 $(a, b, c, d) =$ _____ .

(4) $f(0.48)$ 的近似值為_____ . (以四捨五入法取至小數點後第三位)

解答 (1) -8 ; (2) 3 ; (3) $(1, 2, -1, 3)$; (4) 3.043

解析 (1)

$$\begin{array}{r}
 4 \quad -4 \\
 2+1-1 \overline{) 8 \quad +a \quad +b+5} \\
 \underline{8 \quad +4 \quad -4} \\
 (a-4) + (b+4) + 5 \\
 \underline{-8 \quad -4+4} \\
 (a+4) + (b+8) + 1
 \end{array}$$

$$\text{由 } r(x) = 4x + 1 \Rightarrow \begin{cases} a+4=0 \\ b+8=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=-4 \end{cases} \text{ 故 } a+b=-8$$

(2) $f(x) = 8x^3 - 4x^2 - 4x + 5$, 餘式 $r = f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$ (如下綜合除法之餘式)

$$\begin{array}{r}
 8 - 4 - 4 + 5 \left| \frac{1}{2} \right. \\
 \underline{+ 4 + 0 - 2} \\
 8 + 0 - 4 + 3
 \end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{r}
 8 - 4 - 4 + 5 \left| \frac{1}{2} \right. \\
 \underline{+ 4 + 0 - 2} \\
 2 \overline{) 8 + 0 - 4 + 3} \rightarrow d \\
 \underline{4 + 0 - 2} \\
 \quad + 2 + 1 \\
 2 \overline{) 4 + 2 - 1} \rightarrow c \\
 \underline{2 + 1} \\
 \quad + 1 \\
 2 \overline{) 2 + 2} \rightarrow b \\
 \underline{1} \rightarrow a
 \end{array}$$

由上綜合除法之計算, 序對 $(a, b, c, d) = (1, 2, -1, 3)$

$$(4) \text{由(3)} \Rightarrow f(x) = 3 - (2x - 1) + 2(2x - 1)^2 + (2x - 1)^3$$

$$\text{則 } f(0.48) = 3 - (-0.04) + 2 \times (0.0016) + \dots \doteq 3.043$$

13. 設 $f(x) = 351x^5 - 692x^4 - 23x^3 + 9x^2 - 36x + 50$, 則 $f(2) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解答 -10

解析

$$\begin{array}{r}
 351 - 692 - 23 + 9 - 36 + 50 \left| 2 \right. \\
 \underline{+ 702 + 20 - 6 + 6 - 60} \\
 351 + 10 - 3 + 3 - 30 - 10
 \end{array}$$

由上綜合除法可知: 餘式 $r = f(2) = -10$

14. 設 $17^5 - 15 \times 17^4 - 35 \times 17^3 + 13 \times 17^2 + a \times 17 + 1 = 35$, 則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

解答 70

解析 令 $f(x) = x^5 - 15x^4 - 35x^3 + 13x^2 + ax + 1 \quad \therefore f(17) = 35$

表 $x - 17$ 除 $f(x)$ 的餘式為 35, 由綜合除法:

$$\begin{array}{r} 1 \quad -15 \quad -35 \quad 13 \quad a \quad 1 \quad | \quad 17 \\ \hline 17 \quad 34 \quad -17 \quad -68 \quad 17a-68 \times 17 \\ \hline 1 \quad 2 \quad -1 \quad -4 \quad a-68 \quad ,35 \end{array}$$

$$\Rightarrow 17a - 68 \times 17 + 1 = 35 \quad \therefore 17a = 68 \times 17 + 34 \Rightarrow a = 68 + 2 = 70$$

15. 計算 $2\left(\frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)^4 + \left(\frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)^3 - \left(\frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)^2 - 10\left(\frac{3+\sqrt{17}}{4}\right) + 2$ 之值為_____。

解答 $\frac{23+\sqrt{17}}{4}$

解析 令 $x = \frac{3+\sqrt{17}}{4} \Rightarrow 4x - 3 = \sqrt{17} \xrightarrow{\text{平方}} 16x^2 - 24x - 8 = 0 \quad \therefore 2x^2 - 3x - 1 = 0$

設 $f(x) = 2x^4 + x^3 - x^2 - 10x + 2 \Rightarrow$ 求值式 $= f\left(\frac{3+\sqrt{17}}{4}\right)$

$\therefore f(x) = (2x^2 - 3x - 1)(x^2 + 2x + 3) + (x + 5)$

$\therefore f\left(\frac{3+\sqrt{17}}{4}\right) = \frac{3+\sqrt{17}}{4} + 5 = \frac{23+\sqrt{17}}{4}$

$$\begin{array}{r} 1+2+3 \\ 2-3-1 \overline{) 2+1-1-10+2} \\ \underline{2-3-1} \\ 4+0-10 \\ \underline{4-6-2} \\ 6-8+2 \\ \underline{6-9-3} \\ 1+5 \end{array}$$

16. 下式是小明利用綜合除法計算三次多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的算式，因不小心將飲料翻倒在計算紙上，所以只能辨識部分數字：（無法辨識的數字以英文字母代替）若小明沒有計算錯誤，求 $a+b+c+d$ 的值為_____。

$$\begin{array}{r} a \quad +b \quad +c \quad +d \quad | \quad 1 \\ +) \quad \quad 5 \quad +e \quad +f \quad | \\ \hline g \quad +3 \quad +h \quad | \quad -8 \end{array}$$

解答 -8

解析 SOL 一

$a = g, g \times 1 = 5 \quad \therefore g = 5, b + 5 = 3 \quad \therefore b = -2, 3 \times 1 = e \quad \therefore e = 3$

又 $c + e = h \quad \therefore c + 3 = h, h \times 1 = f, d + f = -8$

$\Rightarrow a + b + c + d = 5 + (-2) + (h - 3) + (-8 - f) = 5 + (-2) + (f - 3) + (-8 - f) = -8$

SOL 二

係數總和 $a + b + c + d = f(1)$ ，即 $f(x) \div (x-1)$ 之餘式 -8

17. 若三次多項式 $g(x)$ 的 $g(-1) = g(0) = g(2) = 0, g(1) = 4$ ，試問

(1) $g(x) =$ _____。

(2) 若多項式 $h(x) = x^4 - x^2 + 1$ ，則 $3g(x) - 4h(x)$ 被 $x-1$ 除的餘式為_____。

解答 (1) $-2x(x+1)(x-2)$; (2) 8

解析 (1)由 $g(-1) = g(0) = g(2) = 0$, $\deg g(x) = 3$, 可設 $g(x) = ax(x+1)(x-2)$

又 $g(1) = a \times 2 \times (-1) = 4 \Rightarrow a = -2$, 故 $g(x) = -2x(x+1)(x-2)$

(2)設 $F(x) = 3g(x) - 4h(x)$

則所求餘式為 $F(1) = 3g(1) - 4h(1) = 3 \times 4 - 4 \times (1 - 1 + 1) = 12 - 4 = 8$

18.已知 $f(x) = (x^2 + 1)(x^{10} + 1) + x - 1$, 則

(1) $f(x)$ 除以 $x+1$ 得餘式為_____ . (2) $(x+1)f(x)$ 除以 $x^2 + 1$ 得商式為_____ .

解答 (1) 2; (2) $x^{11} + x^{10} + x + 2$

解析 (1)所求 $= f(-1) = [(-1)^2 + 1][(-1)^{10} + 1] - 1 - 1 = 2 \cdot 2 - 1 - 1 = 2$

$(x+1)f(x) = (x+1)(x^2 + 1)(x^{10} + 1) + (x+1)(x-1)$

$= (x^2 + 1)(x+1)(x^{10} + 1) + (x^2 + 1) - 2 = (x^2 + 1)[(x+1)(x^{10} + 1) + 1] - 2$

得商式為 $(x+1)(x^{10} + 1) + 1 = x^{11} + x^{10} + x + 2$

19.設 $f(x)$ 為實係數多項式, 以 $x-1$ 除之, 餘式為 9; 以 $x-2$ 除之, 餘式為 16, 求 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 的餘式為_____ .

解答 $7x + 2$

解析 已知 $f(1) = 9$, $f(2) = 16$, 設 $f(x) = (x-1)(x-2)Q(x) + (ax+b)$

$$\begin{cases} f(1) = a + b = 9 \\ f(2) = 2a + b = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = 2 \end{cases} \therefore \text{餘式} = 7x + 2$$

20.設多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$, $x^2 - 2x + 3$ 之餘式依次為 2, $4x + 6$, 則 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x^2 - 2x + 3)$ 的餘式為_____ .

解答 $-4x^2 + 12x - 6$

解析 $f(x) = (x-1)(x^2 - 2x + 3)h(x) + a(x^2 - 2x + 3) + 4x + 6$

$f(1) = 2a + 10 = 2 \Rightarrow a = -4$

\therefore 餘式為 $-4x^2 + 12x - 6$

21.設 $f(x)$ 除以 $(x-1)^2$ 的餘式是 $x+2$, 除以 $(x-2)^2$ 的餘式是 $3x+4$, 則 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)^2$ 的餘式是_____ .

解答 $-4x^2 + 19x - 12$

解析 已知 $\begin{cases} f(x) = (x-1)^2 q_1(x) + x + 2 \\ f(x) = (x-2)^2 q_2(x) + 3x + 4 \end{cases} \Rightarrow f(1) = 3$

設 $f(x) = (x-1)(x-2)^2 Q(x) + [a(x-2)^2 + 3x + 4]$

令 $x=1$ 代入 $\Rightarrow f(1) = a + (3+4) = 3$ 得 $a = -4$

故餘式為 $-4(x-2)^2 + 3x + 4 = -4x^2 + 19x - 12$

22.設 $f(x)$ 為三次多項式, 且已知 $f(0) = 1$, $f(1) = 9$, $f(2) = 8$, $f(3) = 4$, 則 $f(4) =$ _____ .

解答 3

解析 【解1】牛頓法

設 $f(x) = a(x-1)(x-2)(x-3) + b(x-1)(x-2) + c(x-1) + d$

由 $f(1) = 9$, 得 $9 = d$

由 $f(2) = 8$, 得 $8 = c + d = c + 9 \Rightarrow c = -1$

由 $f(3) = 4$, 得 $4 = 2b + 2c + d = 2b - 2 + 9 \Rightarrow b = -\frac{3}{2}$

由 $f(0) = 1$, 得 $1 = -6a + 2b - c + d = -6a - 3 + 1 + 9 \Rightarrow a = 1$

$$\therefore f(x) = (x-1)(x-2)(x-3) - \frac{3}{2}(x-1)(x-2) - (x-1) + 9$$

$$\text{故 } f(4) = 3 \times 2 \times 1 - \frac{3}{2} \times 3 \times 2 - 3 + 9 = 3$$

【解 2】Lagrange 法

$$f(x) = 1 \times \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} + 9 \times \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \\ + 8 \times \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} + 4 \times \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)}$$

$$f(4) = 1 \times \frac{(4-1)(4-2)(4-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} + 9 \times \frac{(4-0)(4-2)(4-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \\ + 8 \times \frac{(4-0)(4-1)(4-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} + 4 \times \frac{(4-0)(4-1)(4-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} = -1 + 36 - 48 + 16 = 3$$

23. 若多項式 $f(x)$ 除以 $x^2 + 2x - 3$ 得餘式 $2x + 5$; 除以 $x^2 - 3x - 10$ 得餘式 $5x - 2$, 則 $f(x)$ 除以 $x^2 - 6x + 5$ 的餘式為_____.

解答 $4x + 3$

解析 已知 $\begin{cases} f(x) = (x^2 + 2x - 3)q_1(x) + 2x + 5 \\ f(x) = (x^2 - 3x - 10)q_2(x) + 5x - 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = (x+3)(x-1)q_1(x) + 2x + 5 \\ f(x) = (x-5)(x+2)q_2(x) + 5x - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 7 \\ f(5) = 23 \end{cases}$$

設 $f(x) = (x^2 - 6x + 5)Q(x) + R(x) = (x-5)(x-1)Q(x) + ax + b$

$$\text{令 } x=1 \Rightarrow f(1) = a + b = 7 \cdots \cdots \textcircled{1}; x=5 \Rightarrow f(5) = 5a + b = 23 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

由 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 得 $a = 4$, $b = 3$, 故餘式 $R(x) = ax + b = 4x + 3$

24. 多項式 $f(x) = x^{2000} + 3x^{90} - 5x^{18} + 7$ 除以 $x^3 - 1$ 之餘式為_____.

解答 $x^2 + 5$

解析 考慮 $f(x) = Q(x)(x^3 - 1) + r(x)$

令 $x^3 - 1 = 0$, 即令 $x^3 = 1$, 可由 $f(x)$ 求得餘式 $r(x)$

$$\therefore f(x) = (x^3)^{666} x^2 + 3(x^3)^{30} - 5(x^3)^6 + 7$$

$$\therefore f(x) \text{ 除以 } x^3 - 1 \text{ 之餘式為 } 1^{666} x^2 + 3(1)^{30} - 5(1)^6 + 7 = x^2 + 5$$

25. 以 $x-1$ 除多項式 $f(x)$ 餘 1, 以 $x^2 + x + 1$ 除 $f(x)$ 餘式 $-x - 1$, 求以 $x^3 - 1$ 除 $f(x)$ 之餘式為_____.

解答 x^2

解析 以 $x-1$ 除多項式 $f(x)$ 餘 1 $\therefore f(1) = 1$

設 $f(x) = (x^2 + x + 1)[(x-1)Q'(x) + a] - x - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)Q'(x) + a(x^2 + x + 1) - x - 1$

$$\therefore f(1) = a \times (1+1+1) - 1 - 1 = 1 \Rightarrow a = 1$$

$$\therefore \text{餘式為 } (x^2 + x + 1) - x - 1 = x^2$$

26. 設 $f(x)$ 是三次多項式, 已知 $f(1) = 5$, $f(2) = 6$, $f(3) = 11$, $f(4) = 8$, 則:

(1) $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 的餘式為_____ . (2) $f(x) =$ _____ .

解答

$$(1) 2x^2 - 5x + 8; (2) -2x^3 + 14x^2 - 27x + 20$$

解析

$$\text{設 } f(x) = a(x-1)(x-2)(x-3) + b(x-1)(x-2) + c(x-1) + d,$$

$$x=1 \text{ 時, } f(1) = d = 5;$$

$$x=2 \text{ 時, } f(2) = c + d = 6, \text{ 得 } c = 1;$$

$$x=3 \text{ 時, } f(3) = 2b + 2c + d = 11, \text{ 得 } b = 2;$$

$$x=4 \text{ 時, } f(4) = 6a + 6b + 3c + d = 8, \text{ 得 } a = -2,$$

$$\text{故(1)餘式為 } 2(x-1)(x-2) + (x-1) + 5 = 2x^2 - 5x + 8.$$

$$(2) f(x) = -2(x-1)(x-2)(x-3) + 2(x-1)(x-2) + (x-1) + 5 = -2x^3 + 14x^2 - 27x + 20.$$