高雄市明誠中學 高一數學平時測驗　　日期：101.10.03					
範圍	2-1 多項函數	班級	一年____班	姓名	
		座號			

一、填充題　(每題 10 分)

1.設 $f(x)$爲一次函數，且 $f(1)=1$，$f(2)=4$，則 $f(3)=$ ____________ .

解答　7

解析　設 $f(x)=ax+b$，則 $a+b=1\cdots(1)$，$2a+b=4\cdots(2)$，

由(1)(2)解得 $a=3$，$b=-2$，$\therefore f(x)=3x-2$，$f(3)=9-2=7$.

2.設 $f(x)=(x-1)^2+(x-2)^2+\ \cdots\ +(x-10)^2$，則 $f(x)$在 $x=$ ____________時有最小值 .

解答　5.5

解析　$f(x)=(x-1)^2+(x-2)^2+\ \cdots\ +(x-10)^2=10x^2-110x+385=10(x-\frac{11}{2})^2+\frac{165}{2}$

當 $x=\frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10}{10}=\frac{11}{2}$時，$f(x)$有最小值$\frac{165}{2}$.

3.若 $y=f(x)$爲一次函數，已知 x 值增加 3 時，所對應的 y 值減少 6，又 $f(0)=6$，則 $f(x)=$ _______ .

解答　$-2x+6$

解析　設 $f(x)=ax+b$，$f(0)=6\Rightarrow b=6$，$\therefore f(x)=ax+6$，

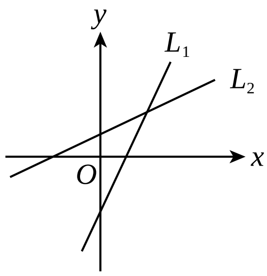
(2) x 值增加 3 時，所對應的 y 值減少 6，即 $f(3)=0$ ，$0=3a+6$

$\Rightarrow a=-2$，$\therefore f(x)=-2x+6$.

4.如圖，兩直線 L_1、L_2 之方程式分別爲 L_1：$x+ay+b=0$，L_2：$x+cy+d=0$，

請選出正確的選項：(1)$a>0$　(2)$b<0$　(3)$c>0$　(4)$d>0$　(5)$a>c$

答：________________ .（多選題）



解答　(2)(4)(5)

解析　$\because m_1=-\frac{1}{a}>0$ ，$\therefore a<0$，$\because m_2=-\frac{1}{c}>0$ ，$\therefore c<0$，

又 $m_1>m_2$，$-\frac{1}{a}>-\frac{1}{c}\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{c}\Rightarrow a>c$ ，

$y=0$ 代入 L_1：$x_1=-b>0\Rightarrow b<0$，代入 L_2：$x_2=-d<0\Rightarrow d>0$，故選(2)(4)(5) .

5.設 $f(x)=\frac{5}{3}x-2^{10}$ ，求 $\frac{f(1911)-f(2012)}{2012-1911}$之值爲____________ .

解答　$-\frac{5}{3}$

解析　$\frac{f(1911)-f(2012)}{2012-1911}=-\frac{f(2012)-f(1911)}{2012-1911}=-\frac{5}{3}$.(斜率的定義)

6.有一個二次函數的方程式爲 $y=5x^2-6x+7$，若將此二次函數的圖形向右平移 3 個單位，再向下平移 4 個單位，則平移後所得的二次函數的方程式爲____________________ .

解答　$y=5x^2-36x+66$

解析　平移後方程式爲 $y-(-4)=5(x-3)^2-6(x-3)+7\Rightarrow y=5x^2-36x+66$.

7.設 Γ：$y=3x^2+6x-5$，將 Γ 之圖形沿著 x 軸方向移 h 單位，再沿著 y 軸方向移 k 單位，得新拋物線方程式爲 $y=3x^2-18x+14$，求數對$(h,k)=$ ____________ .

解答　$(4\ ,-5)$

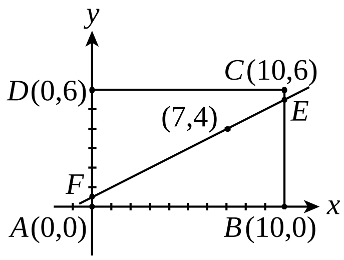
解析　原方程式 $y=3x^2+6x-5=3(x^2+2x+1)-8=3(x+1)^2-8$，頂點 $(-1,-8)$

新方程式 $y=3x^2-18x+14=3(x^2-6x+9)-13$

$=3(x-3)^2-13$，頂點 $(3,-13)$

由兩頂點　$\therefore h=4$，$k=-5$，故數對 $(h\ ,k)=(4\ ,-5)$．

8.設 $A(0,0)$，$B(10,0)$，$C(10,6)$，$D(0,6)$為坐標平面上的四個點。如果直線 $y=m(x-7)+4$ 將四邊形 $ABCD$ 分成面積相等的兩塊，那麼 $m=$__________（化成最簡分數）．



解答　$\dfrac{1}{2}$

解析　$y=m(x-7)+4$ 將平行四邊形 $ABCD$ 分成面積相等的兩塊，

必過對角線交點 $(\dfrac{0+10}{2},\dfrac{0+6}{2})=(5,3)\Rightarrow$ 代入 $y=m(x-7)+4$，

$3=m(5-7)+4\Rightarrow\quad\Rightarrow\ m=\dfrac{1}{2}$ ．

9.二次函數 $y=-3x^2+6x+1$ 的圖形對稱軸方程式為(1)________，頂點坐標為(2)________．

解答　(1)$x=1$;(2)$(1,4)$

解析　$y=-3x^2+6x+1=-3(x^2-2x+1)+1+3=-3(x-1)^2+4$，

$\therefore$對稱軸方程式為 $x=1$，頂點坐標為$(1,4)$．

10.設 x 是實數，則函數 $f(x)=-2x^2+4x+5$ 的最大值為__________．

解答　7

解析　$f(x)=-2(x^2-2x+1)+5+2=-2(x-1)^2+7\le 7$，$\therefore x=1$ 時，$f(x)$有最大值 7．

11.$y=-x^2+2x+2$ 且 $-3\le x\le 2$，求 y 的最小值為__________．

解答　-13

解析　配方：$y=-(x-1)^2+3$，$\therefore$當 $x=-3$ 時，y 有最小值 -13．

12.設 $y=x^2-3x+2$ 與 $y=3x-2$ 兩圖形交於 A，B 兩點，則 $\overline{AB}$ 之長為__________．

解答　$10\sqrt{2}$

解析　$y=3x-2$ 代入 $y=x^2-3x+2\Rightarrow x^2-3x+2=3x-2\Rightarrow x^2-6x+4=0$，

設兩交點為 $A(x_1\ ,y_1)$，$B(x_2\ ,y_2)$，則 $x_1+x_2=6$，$x_1x_2=4$

$\Rightarrow(x_2-x_1)^2=\ (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=6^2-4\times 4=20$，

$A(x_1\ ,y_1)$，$B(x_2\ ,y_2)$在直線 $y=3x-2$ 上 $y_2=3x_2-2,\quad y_1=3x_1-2$

故 $y_2-y_1=3(x_2-x_1)\Rightarrow(y_2-y_1)^2=9(x_2-x_1)^2=180$，

$\therefore\ \overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{20+180}=\sqrt{200}=10\sqrt{2}$ ．

13.設 x 是實數，若多項式$(a-1)x^2+2x+3$ 恆大於 0，a 的範圍為__________．

解答　$a>\dfrac{4}{3}$

解析　依題意得 $a-1>0$，且判別式 $1-3(a-1)<0$，即 $a>1$，且 $a>\dfrac{4}{3}$，$\therefore a>\dfrac{4}{3}$ ．

14.若二次函數 $y = x^2 - 2ax + (4 + 2a)$的圖形恆在直線 $y = ax - 1$ 圖形的上方，則實數 a 的範圍爲＿＿＿＿＿＿．

解答 $-\frac{10}{9} < a < 2$

解析 $x^2 - 2ax + (4 + 2a) > ax - 1$ 恆成立 $\Rightarrow x^2 - 3ax + (5 + 2a) > 0$ 恆成立

$\therefore$判別式$(-3a)^2 - 4\cdot 1\cdot (5 + 2a) < 0 \Rightarrow 9a^2 - 8a - 20 < 0$

$\Rightarrow (9a + 10)(a - 2) < 0 \Rightarrow -\frac{10}{9} < a < 2$ ．

15.坐標平面上，通過 $A(0,1)$，$B(3,0)$兩點直線的斜率爲＿＿＿＿＿＿．

解答 $-\frac{1}{3}$

解析 斜率值爲橫坐標增加 1 單位，縱坐標的變化量　所求斜率爲 $\frac{1-0}{0-3} = -\frac{1}{3}$ ．

16.若直線L：$x + 2y + 4 = 0$,則(1)L的斜率爲＿＿＿＿＿＿；(2)與y軸的交點爲＿＿＿＿＿＿.

解答 $(1) -\frac{1}{2}$;$(2)(0, -2)$

解析 L：$x + 2y + 4 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - 2$，斜率爲$-\frac{1}{2}$，與 y 軸交於$(0, -2)$．

17.二次函數 $f(x) = x^2 + 2x - 3$ 之圖形，交 x 軸於 A，B 兩點，且 C 爲此拋物線之頂點，則$\triangle ABC$ 之面積爲＿＿＿＿＿＿．

解答 8

解析 $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1$ 或 $-3 \Rightarrow$ 與 x 軸交於$(1,0)$，$(-3,0)$

$\because f(x) = x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4 \Rightarrow$ 頂點 $C(-1, -4)$　　$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$ ．

18.設拋物線 Γ ：$y = 2x^2$，將 Γ 平移至 Γ'，使 Γ'的對稱軸爲 $x = 3$，且過點$(2,6)$，則拋物線 Γ'之方程式爲＿＿＿＿＿＿．

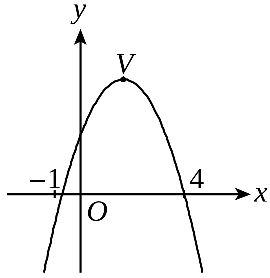
解答 $y = 2(x - 3)^2 + 4$

解析 設 Γ'：$y = 2(x - 3)^2 + k$　$\because$過點$(2,6)$代入 $\Rightarrow 6 = 2 + k \Rightarrow k = 4$ ．

故 Γ'：$y = 2(x - 3)^2 + 4 = 2x^2 - 12x + 22$ ．

19.二次函數 $y = ax^2 + bx + c$ 如圖，請問 a，b，c，$b^2 - 4ac$，$a + b + c$，$a - b + c$，$4a - 2b + c$，$16a + 4b + c$ 八個數中有＿＿＿＿＿＿個是正數．

解答 4



解析 $y = ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$，

①$\because$開口向下，$\therefore a < 0$ ．

②$\because x = 0$ 時，交 y 軸於正向，$\therefore c > 0$ ．

③$\because$頂點$V(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a})$在第一象限$-\frac{b}{2a} > 0$ 且 $a < 0$，$\therefore b > 0$ ．

④$\because$與 x 軸交 2 點，$\therefore b^2 - 4ac > 0$ ．

⑤$f(1) = a + b + c > 0$ ．

⑥$f(-1)=a-b+c<0$.

⑦$f(-2)=4a-2b+c<0$.

⑧$f(4)=16a+4b+c=0$.

故有 4 個正數.

20.設一個二次函數的圖形 $y=ax^2+bx+c$ 通過$(0,-7)$,$(1,-11)$與$(2,-11)$,則序組$(a,b,c)=$____.

解答 $(2,-6,-7)$

解析 設 $f(x)=ax^2+bx+c$,則$\begin{cases} f(0)=c=-7 \\ f(1)=a+b+c=-11 \\ f(2)=4a+2b+c=-11 \end{cases}$,

$c=-7$ 代入後兩式得 $a+b=-4$,$2a+b=-2$,解得 $a=2$,$b=-6$.

21.函數 $f(x)=x^2+ax+b$ 的圖形頂點坐標爲(3,6),求此函數圖形與直線 $y=4x-1$ 的交點坐標爲________.

解答 (2,7),(8,31)

解析 $\because$頂點坐標爲$(3,6)\Rightarrow f(x)=(x-3)^2+6=x^2-6x+15$,$\therefore a=-6$,$b=15$,

解聯立式$\begin{cases} y=x^2-6x+15 & \cdots(1) \\ y=4x-1 & \cdots(2) \end{cases}$,得 $x^2-10x+16=0$,

$\therefore x=2$ 或 $x=8$,代入(2)得兩交點坐標爲(2,7)及(8,31).

22.設拋物線 $y=ax^2+bx+c$ 過兩點 $A(-1,3)$,$B(3,3)$,且頂點在直線 $3x-2y+7=0$ 上,則此拋物線的方程式爲____________.

解答 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2+5$

解析 $\because$拋物線通過水平線 $y=3$ 上的 $A(-1,3)$,$B(3,3)$兩點,

$\therefore$對稱軸爲$\overline{AB}$的中垂線 $x=1\cdots(1)$,又頂點在 $3x-2y+7=0$ 線上$\cdots(2)$,

由(1)(2)可得頂點爲 $V(1,5)$,$\therefore$拋物線可設爲 $y=a(x-1)^2+5\cdots(*)$,

$A(-1,3)$代入$(*)$式得 $3=4a+5\Rightarrow a=-\frac{1}{2}$,$\therefore$拋物線的方程式爲 $y=-\frac{1}{2}(x-1)^2+5$.

23.已知 $y=ax^2+bx+\frac{1}{a}$ 在 $x=-3$ 時有最小值 8,則數對$(a,b)=$____________.

解答 $(\frac{1}{9},\frac{2}{3})$

解析 $\because y=ax^2+bx+\frac{1}{a}\cdots$①在 $x=-3$ 時有最小值 8,

$\therefore y=a(x+3)^2+8=ax^2+6ax+9a+8\cdots$②,且 $a>0\cdots$③,

比較①②得 $b=6a\cdots(\text{I})$,$\frac{1}{a}=9a+8\cdots(\text{II})$,

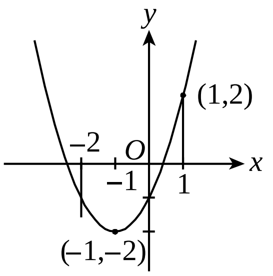
由$(\text{II})\Rightarrow 9a^2+8a-1=0\Rightarrow(a+1)(9a-1)=0\Rightarrow a=-1$ 或$\frac{1}{9}$(-1 不合,由③),

$a=\frac{1}{9}$代入(Ⅰ)得 $b=\frac{2}{3}$.

24.二次函數 $y=x^2+2x-1$,當 $x^2+x-2\le 0$ 時,試求(1) y 之最大值爲______,(2)最小值爲____.

解答 (1)2;(2) -2

解析 $x^2+x-2\le 0 \Rightarrow (x+2)(x-1)\le 0 \Rightarrow -2\le x\le 1$



$y=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$

(1)當 $x=1$ 時 $y=2$ 為最大值

(2)當 $x=-1$ 時 $y=-2$ 為最小值．

25.某電影院，每張票價為 80 元時，每場觀眾有 400 人，如果票價每減 1 元，觀眾就增加 20 人，那麼(1)每張票價應訂為__________元時電影院的收入為最多，(2)每場收入最多為__________元．

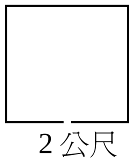
解答 (1)50;(2)50000

解析 訂票價為$(80-x)$元時總收入 $S=(80-x)(400+20x)$

$=20(80-x)(20+x)=20(1600+60x-x^2)=20[-(x-30)^2+2500]$

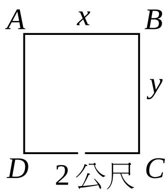
$x=30$ 時即每張票訂為 50 元時，總收入為 50000 元最多．

26.一農夫想用 102 公尺長之竹籬圍成一長方形菜圃，並在其中一邊正中央留著寬 2 公尺的出入口，如圖所示．此農夫所能圍成的最大面積為__________平方公尺．



解答 676

解析 如圖，設 $\overline{AB}=x$ 公尺，$\overline{BC}=y$ 公尺，則 $x+(x-2)+2y=102 \Rightarrow x+y=52$



面積 $xy=x(52-x)=-x^2+52x=-(x-26)^2+676$

即 $x=26$ 時，面積的最大值為 676 平方公尺．