

高雄市明誠中學 高一數學平時測驗					日期：101.09.19
範圍	1-1、2 數與數線	班級	一年__班	姓名	
	(B)、式子的運算	座號			

一、填充題 (每題 10 分)

1. x 為自然數，滿足 $|2x - 3| < 10$ 之解共有_____個。

解答 6

解析 $|2x - 3| < 10 \Rightarrow -10 < 2x - 3 < 10 \Rightarrow -7 < 2x < 13 \Rightarrow -\frac{7}{2} < x < \frac{13}{2}$,

$\therefore x$ 為自然數，則 $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ，共 6 個。

2. 解 $|-2x + 1| > 4$ 得 x 的範圍為_____。

解答 $x > \frac{5}{2}$ 或 $x < -\frac{3}{2}$

解析 $-2x + 1 > 4$ 或 $-2x + 1 < -4$ ， $\Rightarrow -2x > 3$ 或 $-2x < -5$ ， $\therefore x < -\frac{3}{2}$ 或 $x > \frac{5}{2}$ 。

3. 若實數 x 滿足 $1 < |x - 1| \leq 2$ ，則 x 之範圍為_____。

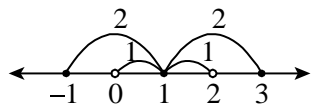
解答 $2 < x \leq 3$ 或 $-1 \leq x < 0$

解析 (解一)

$\therefore 1 < |x - 1| \leq 2$,

$\therefore 1 < x - 1 \leq 2$ 或 $-2 \leq x - 1 < -1$,

$2 < x \leq 3$ 或 $-1 \leq x < 0$ 。



(解二)

用距離圖解法： $1 < |x - 1| \leq 2$

4. 若 x 為實數，且 $|5 - \frac{2}{x}| < 3$ ，則 x 的範圍為_____。

解答 $\frac{1}{4} < x < 1$

解析 $|5 - \frac{2}{x}| < 3$ ，即 $-3 < 5 - \frac{2}{x} < 3$ ，故 $-8 < -\frac{2}{x} < -2$ ，即 $2 < \frac{2}{x} < 8$ 。 $1 < \frac{1}{x} < 4$ ，故得 $\frac{1}{4} < x < 1$ 。

5. $x \in \mathbb{R}$ ， $y = \sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(x+5)^2}$ ，則 y 之最小值為_____。

解答 8

解析 $y = \sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(x+5)^2} = |x-3| + |x+5|$ ，

① $x \geq 3$: $y = 2x + 2 \geq 8$ 。

② $-5 \leq x < 3$: $y = 8$ 。

③ $x < -5$: $y = -2x - 2 > 8$ 。

故最小值為 8。

6. 設 a, b 皆為實數，若 $|ax + 2| > b$ 的解為 $x > 5$ 或 $x < -3$ ，則 $a + b =$ _____ .

解答 6

解析 $x > 5$ 或 $x < -3 \Rightarrow |x - \frac{5+(-3)}{2}| > \frac{5-(-3)}{2} \Rightarrow |x-1| > 4 \Rightarrow |-2x+2| > 8,$

$$\therefore a = -2, b = 8, a + b = 6.$$

7. 數線上兩點 $A(-4), B(10)$,

(1) 求 \overline{AB} 的長為 _____ .

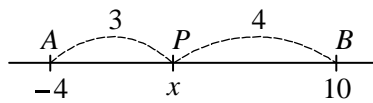
(2) 已知 $P(x)$ 點在 \overline{AB} 上且 $\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 4$ ，求 $x =$ _____ .

(3) 已知 $Q(y)$ 點為 \overline{AB} 外一點且 $\overline{AQ} : \overline{BQ} = 3 : 4$ ，求 $y =$ _____ .

解答 (1) 14; (2) 2; (3) -46

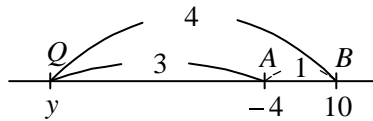
解析 (1) $\overline{AB} = 10 - (-4) = 14.$

(2) 由分點公式得 $x = \frac{3 \times 10 + 4 \times (-4)}{3 + 4} = \frac{14}{7} = 2.$



(3) $\because \overline{AQ} : \overline{BQ} = 3 : 4, \therefore \overline{AQ} : \overline{AB} = 3 : 1,$

由分點公式得 $-4 = \frac{3 \times 10 + 1 \times y}{3 + 1} \Rightarrow -16 = 30 + y \Rightarrow y = -46.$



8. 函數 $f(x) = |x - 4| + |x + 2|$,

(1) 求 x 之範圍為 _____ 時，使 $f(x)$ 有最小值 6 .

(2) 若 $f(x) = k$ (k 為實數)，使 x 無解，求 k 之範圍為 _____ .

解答 (1) $-2 \leq x \leq 4$; (2) $k < 6$

解析 去絕對值

① $x \geq 4: f(x) = (x - 4) + (x + 2) = 2x - 2,$

② $-2 \leq x < 4: f(x) = (4 - x) + (x + 2) = 6,$

③ $x < -2: f(x) = (4 - x) - (x + 2) = -2x + 2,$

(1) 當 $-2 \leq x \leq 4$ 時， $f(x)$ 有最小值 6 .

(2) $k < 6$ 時， x 無解 .

9. $|x + 3| + |x + 2| - |x + 1|$ 的最小值為 _____ .

解答 -1

解析 去絕對值

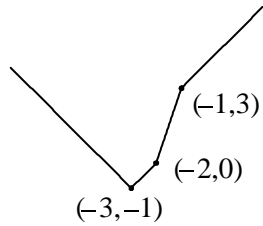
① $x \geq -1: (x + 3) + (x + 2) - (x + 1) = x + 4.$

② $-2 \leq x < -1: (x + 3) + (x + 2) + (x + 1) = 3x + 6.$

③ $-3 \leq x < -2: (x + 3) - (x + 2) + (x + 1) = x + 2.$

④ $x < -3: -(x + 3) - (x + 2) + (x + 1) = -x - 4.$

故最小值為-1.



10. 設 a, b 為整數, 若 $|a-1|+3|b+2|=4$, 則 (a,b) 共有_____組解.

解答 6

解析 a, b 為整數 $\Rightarrow b+2, a-1$ 亦為整數

(1) $|b+2|=1, |a-1|=1$ 時: $(a,b) = (2, -1), (2, -3), (0, -1), (0, -3)$.

(2) $|b+2|=0, |a-1|=4$ 時: $(a,b) = (5, -2)$ 或 $(-3, -2)$.

由(1)(2)知共 6 組解.

11. 設 x 為實數, 且 $|x-1|+|x-2|=5$, 則 $x =$ _____.

解答 4, -1

解析 (I) $1 \leq x < 2$ 時: $1-x+2-x=5 \Rightarrow x=-1$ (不合).

(II) $x > 2$ 時: $x-1+x-2=5 \Rightarrow x=4$.

(III) $x < 1$ 時: $1-x+2-x=5 \Rightarrow x=-1$.

12. 設 x 為實數, 且 $|x-1|+|x-2|+|x-3|=5$, 則 $x =$ _____.

解答 $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{11}{3}$

解析 去絕對值

(I) $x < 1$ 時: $1-x+2-x+3-x=5 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$.

(II) $1 \leq x < 2$ 時: $x-1+2-x+3-x=5 \Rightarrow x=-1$ (不合).

(III) $2 \leq x < 3$ 時: $x-1+x-2+3-x=5 \Rightarrow x=5$ (不合).

(IV) $x > 3$ 時: $x-1+x-2+x-3=5 \Rightarrow x=\frac{11}{3}$.

13. 設 x, y 為實數, 若 $(x-2)^2 \leq 1, |y-\frac{7}{2}| \leq \frac{13}{2}$, 且 $x-2y$ 的最大值為 M , 最小值為 m , 則 $(M, m) =$ _____.

解答 (9, -19)

解析 $(x-2)^2 \leq 1 \Rightarrow |x-2| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x-2 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq x \leq 3,$

$|y-\frac{7}{2}| \leq \frac{13}{2} \Rightarrow -\frac{13}{2} \leq y-\frac{7}{2} \leq \frac{13}{2} \Rightarrow -3 \leq y \leq 10 \Rightarrow -20 \leq -2y \leq 6,$

$\therefore -19 \leq x+(-2y) \leq 9, M=9, m=-19.$

14. 設 x, y 為實數, 且 $-1 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 3$, 若 $\frac{x}{y}$ 有最大值 M 及最小值 m , 則 $\frac{M}{m}$ 的值為_____.

解答 -2

解析 $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$, $-1 \leq x \leq 2$, $\therefore \frac{-1}{2} \leq x \cdot \frac{1}{y} \leq 1$, $M=1$, $m=-\frac{1}{2}$, 故 $\frac{M}{m} = -2$.

15. 設 $f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-50|$, 則 $f(x)$ 的最小值為_____.

解答 625

解析 在 $25 \leq x \leq 26$ 時, $f(x)$ 為最小, $f(25) = (0+1+2+\dots+24) \times 2 + 25 = 625$.

16. 滿足絕對值不等式 $|2x-3| \leq |x+1|$ 之 x 範圍是_____。(請用 x 的不等式表示)

解答 $\frac{2}{3} \leq x \leq 4$

解析 SOL 一: 去絕對值

① 若 $x \geq \frac{3}{2}$, 則 $2x-3 \leq x+1 \Rightarrow x \leq 4$, $\therefore \frac{3}{2} \leq x \leq 4$,

② 若 $-1 \leq x < \frac{3}{2}$, 則 $-(2x-3) \leq x+1 \Rightarrow x \geq \frac{2}{3}$, $\therefore \frac{2}{3} \leq x < \frac{3}{2}$,

③ 若 $x < -1$, 則 $-(2x-3) \leq -x-1 \Rightarrow x \geq 4$, \therefore 無解,

由①②③可知 $\frac{2}{3} \leq x \leq 4$.

SOL 二

$$\begin{aligned} \text{平方 } (2x-3)^2 &\leq (x+1)^2 \Rightarrow 3x^2 - 18x + 8 \leq 0 \\ &\Rightarrow (3x-2)(x-4) \leq 0 \\ &\Rightarrow \frac{2}{3} \leq x \leq 4 \end{aligned}$$

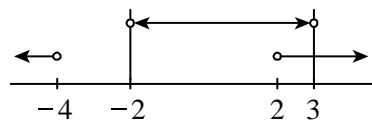
17. 解 $\begin{cases} |x+1| > 3 \\ |2x-1| < 5 \end{cases}$, 得 x 的範圍為_____.

解答 $2 < x < 3$

解析 $|x+1| > 3 \Rightarrow x > 2$ 或 $x < -4$,

$|2x-1| < 5 \Rightarrow -2 < x < 3$,

由重疊圖知 $2 < x < 3$.



18. 設 x 是實數且 $|x-2| : |x+4| = 2 : 1$, 則 $x =$ _____.

解答 -2 或 -10

解析 令 $A(2)$, $B(-4)$, $P(x)$

$$|x-2| : |x+4| = 2 : 1 \Rightarrow \overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$$

$$P \text{ 在 } AB \text{ 之間: } x = \frac{2 \times (-4) + 1 \times 2}{2+1} = -2.$$

$$P \text{ 不在 } AB \text{ 之間: } x = \frac{2 \times (-4) - 1 \times 2}{2-1} = -10.$$

19. 設 a 為 1 至 9 的正整數, 且 $\frac{13}{99} < 0.\overline{1a2} < \frac{14}{99}$, 則 $a =$ _____.

解答 3

解析 $\frac{13}{99} = 0.\overline{13} = 0.1\overline{31}$, $\frac{14}{99} = 0.\overline{14} = 0.1\overline{41}$, $0.1\overline{31} < 0.1a\overline{2} < 0.1\overline{41} \Rightarrow a = 3$.

20. 有一個最簡分數，其分子與分母之和為 20，若將此分數化為小數，並將第三位小數四捨五入得 0.54 一數，則此分數為_____。

解答 $\frac{7}{13}$

解析 設此最簡分數為 $\frac{20-p}{p}$ (p 為正整數, $1 \leq p < 20$, $(p, 20-p) = 1$),

$$\text{則 } 0.535 \leq \frac{20-p}{p} < 0.545 \Rightarrow 0.535p \leq 20-p < 0.545p,$$

$$\text{左式 } 0.535p \leq 20-p \Rightarrow p \leq 13. \dots, \text{ 右式 } 20-p < 0.545p \Rightarrow p > 12. \dots, \therefore p = 13,$$

$$\text{所求分數} = \frac{7}{13}.$$

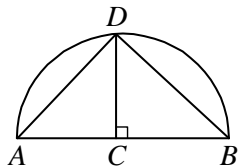
21. 設 a, b 為有理數，且 $(a+b\sqrt{2})(1+2\sqrt{2}) = -1+5\sqrt{2}$ ，求數對 $(a, b) =$ _____。

解答 $(3, -1)$

解析 $(a+b\sqrt{2})(1+2\sqrt{2}) = a+2a\sqrt{2}+b\sqrt{2}+4b = (a+4b) + (2a+b)\sqrt{2} = -1+5\sqrt{2}$,

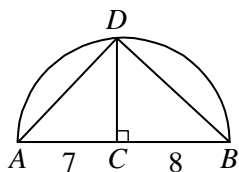
$$\therefore a, b \text{ 為有理數} \quad \therefore \begin{cases} a+4b = -1 \\ 2a+b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}, \text{ 故 } (a, b) = (3, -1).$$

22. 已知 $\overline{AB} = 15$ ，在 \overline{AB} 上取一點 C 使 $\overline{AC} = 7$ ，又過 C 點作 \overline{AB} 的垂直線與以 \overline{AB} 為直徑的半圓交於 D 點，則 $\overline{CD} =$ _____。



解答 $2\sqrt{14}$

解析 $\overline{CD}^2 = \overline{AC} \times \overline{BC} = 7 \times 8 = 56 \Rightarrow \overline{CD} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$.



23. $\frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{12}}}$ 的純小數部分為 t ，則 $\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} =$ _____。

解答 2

$$\text{解析 } \frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{12}}} = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2} = 1. \dots, \text{ 整數} = 1, \text{ 純小數部分 } t = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} - \frac{2}{\sqrt{3}+1} = (\sqrt{3}+1) - (\sqrt{3}-1) = 2 .$$

24. 若 $x^2 + (8x-7)\sqrt{3} = (5-4x) + x^2\sqrt{3}$ 且 x 為有理數, 則 $x =$ _____ .

解答 1

解析 $\begin{cases} x^2 = 5-4x \\ 8x-7 = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+5)(x-1) = 0 \\ (x-7)(x-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \text{ 或 } -5 \\ x=1 \text{ 或 } 7 \end{cases} \therefore x=1 .$

25. $a = \sqrt{17} - \sqrt{11}$, $b = \sqrt{23} - \sqrt{17}$, $c = \sqrt{16-2\sqrt{55}}$, 則 a 、 b 、 c 之大小順序為 _____ .

解答 $b < a < c$

解析 $a = \sqrt{17} - \sqrt{11}$, $b = \sqrt{23} - \sqrt{17}$, $c = \sqrt{11} - \sqrt{5}$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{17} + \sqrt{11}}{6}, \frac{1}{b} = \frac{\sqrt{23} + \sqrt{17}}{6}, \frac{1}{c} = \frac{\sqrt{11} + \sqrt{5}}{6} \Rightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{a} > \frac{1}{c} > 0 \quad \therefore b < a < c .$$

26. 已知 $\frac{3}{28}$ 化成小數時, 在小數點以下第 n 位的數字為 7, 且 $n \geq 100$. 試問: 滿足上述條件的最小 n 值為 _____ .

解答 105

解析 $\frac{3}{28} = 0.10714285$, 而 $100 - 2 = 6 \times 16 + 2$

小數點以下第 100 位數字為 1, 因此再 5 位數出現數字 7
所以 n 的最小 n 值為 105 .