高雄市明誠中學 高一數學平時測驗 日期：101.09.26					
範圍	Chap1 數與數線、式子的運算 2-1 直線(A)	班級	一年____班	姓名	
		座號			

一、填充題 (每題 10 分)

1.設 $f(n)$表示$\dfrac{36}{13}$化為小數後，小數點後第 n 位的數字，則 $f(200) =$ ____________ .

解答 6

解析 $\dfrac{36}{13} = 2.\overline{769230}$ ； $200 \div 6 = 33 \cdots 2$，$\therefore$33 次循環後，第二個數字為 6 .

2.a 為一個二位正整數，若$\dfrac{105}{a}$為有限小數，則 a 的第二大值為____________ .

解答 84

解析 $\dfrac{105}{a}$為有限小數，又 $105 = 3 \times 5 \times 7$，

$\therefore a = 99 = 3^2 \times 11$（╳），$a = 98 = 2 \times 7^2$（╳），

$a = 97 = 1 \times 97$（╳），$a = 96 = 2^5 \times 3^1$（✓）第一大值，

$a = 95 = 5 \times 19$（╳），$a = 94 = 2 \times 47$（╳），

$a = 93 = 3 \times 31$（╳），$a = 92 = 2 \times 47$（╳），

$a = 91 = 7 \times 13$（╳），$a = 90 = 2 \times 3^2 \times 5$（╳）

……………………………………..

$a = 83 = 1 \times 83$（╳），$a = 84 = 2^2 \times 3 \times 7$（✓）第二大值，

取 $a = 84$.

3.設 a，b 是有理數，且$(3+\sqrt{3})a + 6\sqrt{3}\,b = 6 - 4\sqrt{3}$，求數對$(a , b) =$ ____________ .

解答 $(2 , -1)$

解析 $(3+\sqrt{3})a + 6\sqrt{3}\,b = 3a + \sqrt{3}\,a + 6\sqrt{3}\,b$

$\Rightarrow 3a + (a+6b)\sqrt{3} = 6 - 4\sqrt{3}$

$\Rightarrow (3a-6) + (a+6b+4)\sqrt{3} = 0$，

$\because a$，b 為有理數$\therefore \begin{cases} 3a-6=0 \\ a+6b+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$，故$(a , b) = (2 , -1)$.

4.設 $2+\sqrt{3}$ 的整數部分為 a，純小數部分為 b，求 $a + \dfrac{b^2}{1-b} =$ ____________ .

解答 5

解析 $2+\sqrt{3} \fallingdotseq 3.7$，$\therefore a = 3$，$b = 2+\sqrt{3}-3 = \sqrt{3}-1$，

$$a + \frac{b^2}{1-b} = 3 + \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{1-(\sqrt{3}-1)} = 3 + \frac{4-2\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 3+2 = 5 .$$

5.a,b,c 表△ABC 三邊之長,滿足 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$.若 $a+b+c=6$,求△ABC 之面積為______

解答 $\sqrt{3}$

解析 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$，

$\Rightarrow 2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$，

$\Rightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$

$\Rightarrow (a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ac+a^2)=0$

$\Rightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

$\Rightarrow a=b=c=2$，$\therefore \triangle ABC$ 為正三角形，$\triangle ABC$ 面積 $=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2^2=\sqrt{3}$ ．

6.設 $x>0$，$y>0$，且 $2x+3y=12$，求

(1) xy 之最大值為__________．(2)產生最大值時數對$(x,y)=$__________．

解答 (1)6;(2)(3 , 2)

解析 (1)由算幾不等式：$\dfrac{2x+3y}{2}\geq\sqrt{(2x)(3y)}$，$\dfrac{12}{2}\geq\sqrt{6xy}\Rightarrow xy\leq 6$，$\therefore xy$ 的最大值為 6．

(2)此時 $2x=3y=6\Rightarrow x=3$，$y=2$，$\therefore (x,y)=(3,2)$．

7.設 $x>-4$，則 $\dfrac{1}{x+4}+x+7$ 的最小值為__________．

解答 5

解析 由算幾不等式：$\dfrac{\frac{1}{x+4}+(x+4)}{2}\geq\sqrt{\dfrac{1}{x+4}\cdot(x+4)}=1$，

$\dfrac{1}{x+4}+x+4\geq 2\Rightarrow\dfrac{1}{x+4}+x+7\geq 5$，$\therefore$最小值為 5．

8.展開下列各式：(1) $(2x+y)^3=$__________．

(2) $(x^2-x-1)^2=$__________．

解答 (1)$8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$;(2)$x^4-2x^3-x^2+2x+1$

解析 (1) $(2x+y)^3=(2x)^3+3(2x)^2(y)+3(2x)(y)^2+y^3=8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$．

(2) $(x^2-x-1)^2=(x^2)^2+(-x)^2+(-1)^2+2(x^2)(-x)+2(-x)(-1)+2(x^2)(-1)$

$=x^4+x^2+1-2x^3+2x-2x^2=x^4-2x^3-x^2+2x+1$．

9.已知 $1\times 3\times(2^2+1)\times(2^4+1)\times(2^8+1)\times(2^{16}+1)=2^n-1$，求 $n=$__________．

解答 32

解析 原式 $=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$

$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$

$=(2^8-1)(2^8+1)(2^{16}+1)=(2^{16}-1)(2^{16}+1)$

$=2^{32}-1$，

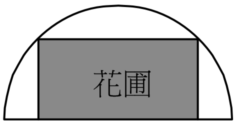
$\therefore n=32$．

10.設 $0<x<1$，化簡 $\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}-2}=$__________．

解答 $-x+\dfrac{1}{x}$

解析 $\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}-2}=\sqrt{x^2-2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}+(\dfrac{1}{x})^2}=\sqrt{(x-\dfrac{1}{x})^2}=|x-\dfrac{1}{x}|=-x+\dfrac{1}{x}$（$\because 0<x<1\Rightarrow\dfrac{1}{x}>x$）．

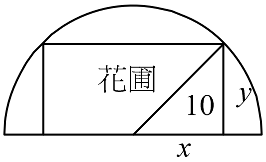
11.如下圖，在一半徑為 10 公尺的半圓形草皮上，想要圍出一長方形作為花圃，且花圃的一邊與圓的直徑重合，求此花圃的最大面積為____________平方公尺．此時，長方形花圃的長寬各為多少?



解答　最大面積為 100 平方公尺，此時長$10\sqrt{2}$公尺，寬$5\sqrt{2}$公尺

解析　設長方形花圃的長為 $2x$ 公尺，寬為 y 公尺

由下圖可知：$x^2+y^2=10^2 \Rightarrow x^2+y^2=100$



由算幾不等式，$\dfrac{x^2+y^2}{2} \ge \sqrt{x^2y^2}=|xy|=xy$

$xy \le 50 \Rightarrow 2xy \le 100$

等號成立 $\Leftrightarrow x=y$，得 $x^2=50 \Rightarrow x=5\sqrt{2}$，所以 $y=5\sqrt{2}$．

故長方形花圃最大面積為 100 平方公尺，此時長$10\sqrt{2}$公尺，寬$5\sqrt{2}$公尺．

12.設 a，b 皆為實數，若$|ax+3|>b$ 的解為 $x>5$ 或 $x<-3$，則 $a+b=$____________．

解答　9

解析　$x>5$ 或 $x<-3 \Rightarrow x-1>4$ 或 $x-1<-4 \Rightarrow |x-1|>4 \Rightarrow |-3x+3|>12$，

$\therefore a=-3$，$b=12$，$a+b=9$．

13.x，y 是實數，已知$|x+2|\le 5$，$|y-4|\le 2$，若

(1)　x^2+y^2的最大值為 M，最小值為 m，則$(M,m)=$____________．

(2)　$\dfrac{x}{y}$的最大值為 M，最小值為 m，則數對$(M,m)=$____________．

解答　(1) $(85,4)$　　(2) $(\dfrac{3}{2},-\dfrac{7}{2})$

解析　$|x+2|\le 5 \Rightarrow -5\le x+2\le 5 \Rightarrow -7\le x\le 3$，

$|y-4|\le 2 \Rightarrow -2\le y-4\le 2 \Rightarrow 2\le y\le 6 \Rightarrow \dfrac{1}{6}\le\dfrac{1}{y}\le\dfrac{1}{2}$

(1)　$0\le x^2\le 49$，$4\le y^2\le 36 \Rightarrow 4\le x^2+y^2\le 85$，$\therefore (M,m)=(85,4)$．

(2) 比較 $(-7)\times\dfrac{1}{6},(-7)\times\dfrac{1}{2},3\times\dfrac{1}{6},3\times\dfrac{1}{2} \Rightarrow -\dfrac{7}{2}\le\dfrac{x}{y}\le\dfrac{3}{2}$，$\therefore (M,m)=(\dfrac{3}{2},-\dfrac{7}{2})$．

14.$x\in\mathbb{R}$，$y=\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(x+4)^2}$，則 y 之最小值為____________．

解答　7

解析　$y=\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(x+5)^2}=|x-3|+|x+4|$，

①$x\ge 3$：$y=2x+1\ge 7$．

② $-4\le x<3$：$y=7$．

③$x < -4$：$y = -2x - 1 > 7$.

故最小值為 7 .

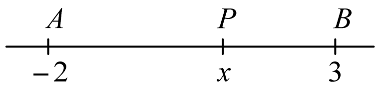
15.在數線上有三點 A、B、P，若 A 的坐標為 -2，B 的坐標為 3，且 P 在 A、B 之間，已知 $\overline{AB}:\overline{AP}=\overline{AP}:\overline{PB}$，求 P 點之坐標為__________ .

解答 $\dfrac{-9+5\sqrt{5}}{2}$

解析 $\because \overline{AB}:\overline{AP}=\overline{AP}:\overline{PB}$，$\therefore [3-(-2)]：[x-(-2)]=[x-(-2)]：(3-x)$

$\Rightarrow (x+2)^2 = 5(3-x) \Rightarrow x^2+9x-11=0 \Rightarrow x=\dfrac{-9\pm\sqrt{125}}{2}=\dfrac{-9\pm5\sqrt{5}}{2}$，

$\because P$ 在 A，B 之間，$\therefore -2<x<3$，$\therefore x=\dfrac{-9+5\sqrt{5}}{2}$.



16.$|x+3|+|x+2|+|x+1|$的最小值為__________ .

解答 2

解析 ①$x \geq -1$：$(x+3)+(x+2)+(x+1)=3x+6\geq 3$.

② $-2 \leq x < -1$：$(x+3)+(x+2)-(x+1)=x+4\geq 2$.

③ $-3 \leq x < -2$：$(x+3)-(x+2)-(x+1)=-x+1\geq 3$.

④$x < -3$：$-(x+3)-(x+2)-(x+1)=-3x-6\geq 3$.

故最小值為 2 .

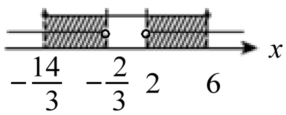
17.不等式 $4<|2-3x|\leq 16$ 之解為__________ .

解答 $-\dfrac{14}{3}\leq x<-\dfrac{2}{3}$ 或 $2<x\leq 6$

解析 ①$|2-3x|\leq 16 \Rightarrow -16\leq 3x-2\leq 16 \Rightarrow -\dfrac{14}{3}\leq x\leq 6$，

②$4<|2-3x| \Rightarrow 2-3x>4$ 或 $2-3x<-4 \Rightarrow x<-\dfrac{2}{3}$ 或 $x>2$，

$\therefore -\dfrac{14}{3}\leq x<-\dfrac{2}{3}$ 或 $2<x\leq 6$.



18.設 x，y，z 為整數，$2|x+1|+|y+2|+3|z-3|=4$，則(x,y,z)有__________組 .

解答 12

解析 由係數大者依序討論：

(1)$|z-3|=1$ 時：$2|x+1|+|y+2|=1 \Rightarrow |x+1|=0$，$|y+2|=1$，

此時 $x=-1$，y 有 2 解，z 有 2 解，共組成 4 解 .

(2)$|z-3|=0$ 時：$2|x+1|+|y+2|=4 \Rightarrow |x+1|=2$，$|y+2|=0$⋯①或

$|x+1|=1$，$|y+2|=2\cdots$②或

$|x+1|=0$，$|y+2|=4\cdots$③

由①得 x 有 2 解，y 有 1 解，z 有 1 解，共組成 2 解，

由②得 x 有 2 解，y 有 2 解，z 有 1 解，共組成 4 解，

由③得 x 有 1 解，y 有 2 解，z 有 1 解，共組成 2 解，

由(1)(2)共有 $4+(2+4+2)=12$（解）．

19.設 x 為實數，且$|x-1|+|x-2|+|x-3|=5$，則 $x=$____________．

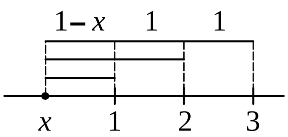
解答 $\frac{1}{3}$或$\frac{11}{3}$

解析 (I)$x<1$ 時：如圖(1)，$3(1-x)+1\times 2+1=5$，$x=\frac{1}{3}$．

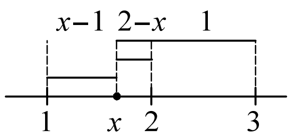
(II)$1\le x<2$ 時：如圖(2)，$(x-1)+2(2-x)+1=5$，$x=-1$（不合）．

(III)$2\le x<3$ 時：同(II)，無解（試作圖對照）．

(IV)$x>3$ 時：同(I)，$x=3+\frac{2}{3}=\frac{11}{3}$．



圖(1)



圖(2)

20.設 x 為實數，且$|x-1|+|x-3|<k$ 無解，則 k 的最大值為____________．

解答 2

解析 $f(x)=|x-1|+|x-3|$的最小值為 $f(3)=2$，

∴原式表示：$k>|x-1|+|x-3|\ge 2$ 無解，

即 $k>2$ 無解，∴$k\le 2$，∴k 的最大值為 2．

21.不等式$|3x+4|<|2x+1|$之 x 的範圍為____________．

解答 $-3<x<-1$

解析 SOL 一

當 $x\ge -\frac{1}{2}$時，$3x+4<2x+1\Rightarrow x<-3$，得 x 無解

當$-\frac{4}{3}<x<-\frac{1}{2}$時，$3x+4<-(2x+1)\Rightarrow x<-1$，得$-\frac{4}{3}<x<-1$

當 $x\le -\frac{4}{3}$時，$-(3x+4)<-(2x+1)\Rightarrow x>-3$，得$-3<x\le -\frac{4}{3}$

故 $-3<x<-1$．

SOL 二

平方$(3x+4)^2<(2x+1)^2\Rightarrow x^2+4x+3<0$

$(x+3)(x+1)<0$

故 $-3<x<-1$．

22.解不等式$|x-2|-3|x+1|>2x-9$ ____________．

解答　$x<\frac{4}{3}$

解析　①$x\geq 2$：$(x-2)-3(x+1)>2x-9\Rightarrow x<1$（不合）．

②$-1\leq x<2$：$(-x+2)-3(x+1)>2x-9\Rightarrow x<\frac{4}{3}$，$\therefore\ -1\leq x<\frac{4}{3}$．

③$x<-1$：$(-x+2)+3(x+1)>2x-9\Rightarrow 5>-9$（合）．

故 $x<\frac{4}{3}$．

23.設 $f(x)$為一次函數，且 $f(1)=1$，$f(2)=4$，則 $f(3)=$____________．

解答　7

解析　設 $f(x)=ax+b$，則 $a+b=1\cdots(1)$，$2a+b=4\cdots(2)$，
由(1)(2)解得 $a=3$，$b=-2$，
$\therefore f(x)=3x-2$，$f(3)=9-2=7$．

24.若線性函數 $f(x)=-\frac{2}{3}x+2$，則 $\frac{f(2999)-f(1999)}{1000}=$____________．

解答　$-\frac{2}{3}$

解析　所求 $=\frac{f(2999)-f(1999)}{2999-1999}$，為 $A(2999,f(2999))$與 $B(1999,f(1999))$兩點連線段的斜率，

而 $\overleftrightarrow{AB}$ 方程式為 $y=f(x)=-\frac{2}{3}x+2$，$\therefore$所求為 $\overleftrightarrow{AB}$ 斜率 $-\frac{2}{3}$．

25.若直線 L 通過 $P(-2,3)$，且直線 L 與直線 M：$2x-y-6=0$ 的交點恰在 x 軸上，則直線 L 的方程式為____________．

解答　$y=-\frac{3}{5}x+\frac{9}{5}$

解析　交點在 x 軸上，設交點坐標為 $Q(k,0)$，
代入 M 得 $2k-6=0\Rightarrow k=3$，$\therefore Q(3,0)$，
故 L 通過 $P(-2,3)$，$Q(3,0)\Rightarrow L$：由 $y=ax+b\Rightarrow y=-\frac{3}{5}x+\frac{9}{5}$．

26.已知直線 L 通過$(0,0)$與$(5,3)$兩點，試求
(1)直線 L 的方程式為____________．(2)直線 L 的斜率為____________．

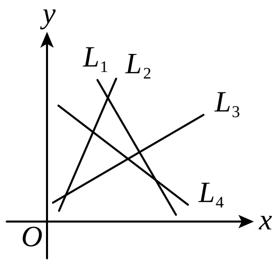
解答　(1) $y=\frac{3}{5}x$;(2) $\frac{3}{5}$

解析　(1)設直線 L 的方程式為 $y=ax+b$

通過$(0,0)$與$(5,3)$兩點　$\therefore\begin{cases}0=b\\3=5a+b\end{cases}\Rightarrow a=\frac{3}{5}$，$b=0$　L 之方程式為 $y=\frac{3}{5}x$

(2)L：$y=\frac{3}{5}x$，斜率為 $\frac{3}{5}$．

28.下圖四直線 L_1,L_2,L_3,L_4的斜率分別為 m_1,m_2,m_3,m_4,則 0 與此四數由小而大依序為____________.



解答　$m_2 > m_3 > 0 > m_4 > m_1$

解析　左下至右上斜率為正，越傾斜斜率越大；左上至右下斜率為負，越傾斜斜率越小

由圖可看出 $m_2 > m_3 > 0 > m_4 > m_1$.

27.設 $A(0,0)$, $B(10,0)$, $C(10,6)$, $D(0,6)$為坐標平面上的四個點。如果直線 $y = m(x-7)+4$ 將四邊形 $ABCD$ 分成面積相等的兩塊，那麼 $m =$ ____________（化成最簡分數） .

解答　$\frac{1}{2}$

解析　所求直線 $y = m(x-7)+4$、直線將平行四邊形 $ABCD$ 分成面積相等兩塊區域必過對角線交點$(5,3) \Rightarrow 3 = -2m+4,\quad m = \frac{1}{2}$ ，直線 $y = \frac{1}{2}(x-7)+4$