CHAP1 總習題

A. 基本能力題

1. 下列“有理數”化成小數，哪些是有限小數，哪些是循環小數？

$\dfrac{12}{99}$，$\dfrac{99}{12}$，$\dfrac{13}{40}$，$\dfrac{65}{78}$，$\dfrac{78}{65}$。

解：最簡分數 $\dfrac{m}{n}$ 為有限小數 $\Longleftrightarrow n$ 只含質因數 2 或 5。

有限小數：$\dfrac{99}{12}=\dfrac{33}{4}$，$\dfrac{13}{40}=\dfrac{13}{2^3\cdot 5^1}$，$\dfrac{78}{65}=\dfrac{6}{5}$。

循環小數：$\dfrac{12}{99}=\dfrac{4}{3\times 11}$，$\dfrac{65}{78}=\dfrac{5}{2\cdot 3}$。

2. 用“＜”或“＝”符號將下列“有理數”依大小順序排列。

$\dfrac{11}{13}$，$\dfrac{17}{19}$，$\dfrac{41}{43}$，$\dfrac{82}{86}$，$\dfrac{83}{87}$。〔提示：當 $0<\dfrac{b}{a}<1$ 時，$\dfrac{b}{a}<\dfrac{b+m}{a+m}$。〕

解：因 $0<\dfrac{11}{13}<1\Rightarrow\dfrac{11}{13}<\dfrac{11+m}{13+m}\,(m\in\boldsymbol{N})$，故

$\dfrac{11}{13}<\dfrac{11+6}{13+6}=\dfrac{17}{19}<\dfrac{17+24}{19+24}=\dfrac{41}{43}=\dfrac{82}{86}<\dfrac{82+1}{86+1}=\dfrac{83}{87}$，即 $\dfrac{11}{13}<\dfrac{17}{19}<\dfrac{41}{43}=\dfrac{82}{86}<\dfrac{83}{87}$。

3. 化簡下列根式：

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$。　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}-\dfrac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$。

解：(1) 原式 $=\dfrac{1}{\sqrt{7-2\sqrt{12}}}=\dfrac{1}{\sqrt{(4+3)-2\sqrt{4\times 3}}}=\dfrac{1}{\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}}$

$=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$。

(2) 原式 $=\dfrac{1}{\sqrt{(3+1)+2\sqrt{3\times 1}}}-\dfrac{1}{\sqrt{(3+1)-2\sqrt{3\times 1}}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}$

$=\dfrac{(\sqrt{3}-1)-(\sqrt{3}+1)}{2}=-1$。

4. (1) 舉出滿足 $\sqrt{2}<r<\sqrt{3}$ 的一個無理數 r，並說明 r 是無理數。

(2) 求滿足 $\sqrt{2}<\dfrac{k}{10}<\sqrt{3}$ 之所有整數 k。

〔提示：$\sqrt{2}=1.414\cdots$，$\sqrt{3}=1.732\cdots$。〕

解：(1) 取 $r=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$，則$\sqrt{2}<r<\sqrt{3}$。

並且 r 為無理數（若 r 是有理數，則$\sqrt{2}+\sqrt{3}=2r$ 仍是有理數，產生矛盾）。

(2) 因$\sqrt{2}=1.414\cdots$，$\sqrt{3}=1.732\cdots$，

$\Rightarrow \frac{14}{10}<\sqrt{2}<\frac{k}{10}\le\frac{17}{10}<\sqrt{3}\Rightarrow k=15，16，17$。

5. 計算下列各式：

(1) $(a-3b)^2(a+3b)^2$。

(2) $1+3(a-1)+3(a-1)^2+(a-1)^3$。

解：(1) 原式$=(a^2-9b^2)^2=a^4-18a^2b^2+81b^4$。(2) 原式$=[1+(a-1)]^3=a^3$。

6. 化簡下列分式：

(1) $\dfrac{a^5-a^2}{a^3-a}$。　　(2) $\dfrac{8x^3+27}{2x+3}-\dfrac{8x^3-27}{2x-3}$。

解：(1) 原式$=\dfrac{a^2(a-1)(a^2+a+1)}{a(a-1)(a+1)}=\dfrac{a(a^2+a+1)}{a+1}$。

(2) 原式$=(4x^2-6x+9)-(4x^2+6x+9)=-12x$。

7. 比較下列各組數的大小：(先做(1)，後做(2))

(1) $\sqrt{7}+\sqrt{3}$與$\sqrt{6}+\sqrt{4}$。(2) $\sqrt{7}-\sqrt{4}$與$\sqrt{6}-\sqrt{3}$。

解：(1) 設 $a=\sqrt{7}+\sqrt{3}$，$b=\sqrt{6}+\sqrt{4}$，則 $a^2=10+2\sqrt{21}$，$b^2=10+2\sqrt{24}$，

故 $a^2<b^2\Rightarrow 0<a<b$　$\therefore$ $\sqrt{7}+\sqrt{3}<\sqrt{6}+\sqrt{4}$。

(2) 由$\sqrt{7}+\sqrt{3}<\sqrt{6}+\sqrt{4}$ $\Rightarrow$ $\sqrt{7}-\sqrt{4}<\sqrt{6}-\sqrt{3}$。

8. 設 $a=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$，$b=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$，試求下列各式的值：

(1) $a+b$。　(2) ab。　(3) a^2+b^2。　(4) a^3+b^3。

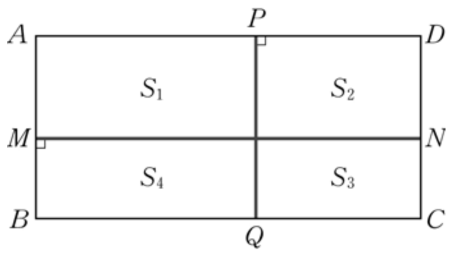
解：(1) $a+b=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{1}{2}[(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2]=4$。

(2) $ab=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\times\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=1$。

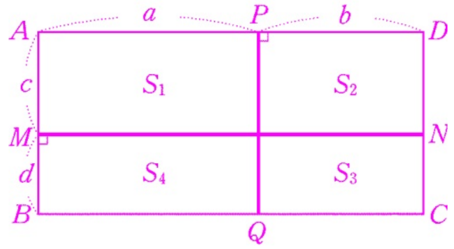
(3) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=4^2-2\times1=14$。

(4) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=4^3-3\times1\times4=52$。

9. 如圖，矩形 $ABCD$ 被兩條垂直線段 $\overline{PQ}$，$\overline{MN}$ 分成四塊，其面積分別為 S_1，S_2，S_3，S_4，證明：$S_1S_3=S_2S_4$。



證：如圖，$S_1 \cdot S_3=(ac)(bd)=(bc)(ad)$
$=S_2 \cdot S_4$。



B. 挑戰題

1. (1) 若 $|5-x|<2$，寫出 x 的範圍。

(2) 將 $-3<x<7$，表成 $|x-a|<b$，求 a，b 的值。

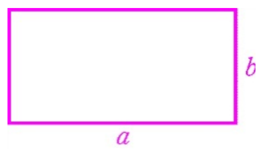
解：(1) $-2<5-x<2 \Longleftrightarrow -7<-x<-3 \Longleftrightarrow 3<x<7$。

(2) $-b<x-a<b \Longleftrightarrow a-b<x<a+b$，

令 $\begin{cases} a+b=7 \\ a-b=-3 \end{cases} \Longleftrightarrow a=2$，$b=5$。

2. 周長固定為 18 公分的所有矩形中，求其面積最大的是多少平方公分？

解：設矩形的長、寬依次為 a，b $(a>0$，$b>0)$，



已知 $2(a+b)=18$，欲求 ab 最大。

因 $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow \dfrac{9}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow ab \leq \dfrac{81}{4}$。

當 $a=b=4.5$ 時（此時矩形變為正方形），矩形面積 $ab=\dfrac{81}{4}$ 最大。

3. 有一輛車子，上山的平均速率為每小時 a 公里，沿同一路線下山，平均速率為每小時 b 公里。

(1) 試說明全程（上山與下山）的平均速率為 $\dfrac{2ab}{a+b}$ 公里/小時。

(2) 設 a，b 均為正數，證明：$\sqrt{ab} \geq \dfrac{2ab}{a+b}$。　〔提示：考慮 $\dfrac{1}{a}$ 與 $\dfrac{1}{b}$ 之算幾不等式。〕

解：(1) 設路程為 ℓ 公里，則上山、下山全程的平均速率為

$$\frac{\text{全程}}{(\text{上山所花時間})+(\text{下山所花時間})}=\frac{2\ell}{(\frac{\ell}{a})+(\frac{\ell}{b})}=\frac{2}{(\frac{1}{a})+(\frac{1}{b})}=\frac{2ab}{a+b}。$$

(2) 因 a，b 均為正數 $\Rightarrow \dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{b}$ 亦為正數 $\Rightarrow \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}) \geq \sqrt{\dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{b}}$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{2ab} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}} \Rightarrow \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}。$$

註：$\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \dfrac{2ab}{a+b}$。（算術平均數 ≥ 幾何平均數 ≥ 調和平均數）

4. 設 a，b 是正數，試求 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}$ 之最小值。

解：引用算幾不等式

$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right)\geq\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{b}}=1\Rightarrow\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geq 2$。

當 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{a}{b}$（即 $a=b$）時，上式的等號成立，

故 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}$ 的最小值為 2。