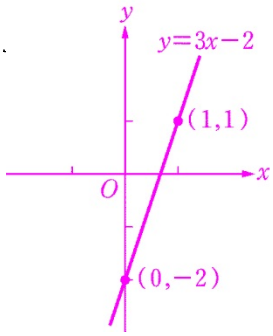
2-1 簡單多項式函數及其圖形

A. 基本能力題

1. 設 $y=f(x)$ 是一次函數，每當 x 值增加 1 個單位時，對應的
位。已知 $f(1)=1$，試求 $f(x)$，並作出 $y=f(x)$ 的圖形。



解：依題意：令 $f(x)=3x+b$

$\because f(1)=1$

$\therefore 3+b=1$，故 $b=-2$

$\therefore f(x)=3x-2$

2. 有一次數學測驗，全班 40 人中最高分 65 分，最低分 40 分。老師想用“線性平移法”加分，使 65 分變成 90 分，40 分變成 60 分。試求：

(1) “線性平移法”所對應的一次函數。

(2) 張三考了 50 分，加分後變成多少分？

解：(1) 設線性平移法所對應的一次函數為 $f(x)=ax+b$，

$$f(65)=90，f(40)=60 \Rightarrow \begin{cases} 65a+b=90 \\ 40a+b=60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{6}{5} \\ b=12 \end{cases}。\quad \therefore f(x)=\frac{6}{5}x+12$$

(2) $f(50)=\dfrac{6}{5}\times 50+12=72$ (分)。

3. 華氏 (Fahrenheit) 溫度計 (°F) 與攝氏 (Celsius) 溫度計 (℃) 的關係如右表：

攝氏	0 ℃	100 ℃
華氏	32 °F	212 °F

(1) 設攝氏 x ℃時，華氏為 y °F，將 y 表成 x 的一次函數。

(2) 若攝氏 x ℃的範圍為 $20\le x\le 25$，人體感覺“清爽舒適”，試求對應的華氏 y °F的範圍。

解：(1) 令 $y=ax+b$，$\begin{cases} 32=a\cdot 0+b \\ 212=a\cdot 100+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{9}{5} \\ b=32 \end{cases}$ $\therefore y=\dfrac{9}{5}x+32$

(2) $20\le x\le 25$，$68\le y=\dfrac{9}{5}x+32\le 77$，$68\le y\le 77$。

4. 人的「肱骨」是手臂「從肘部到肩部」的骨頭。人類學家用肱骨的長度 (單位：公分) 來估計男性、女性的身高 (單位：公分)，其線性關係如下：

$M(x)=2.89x+70.64$ ←------ 男性身高

$F(x)=2.75x+71.48$ ←------- 女性身高

其中 x (公分) 代表肱骨的長度。某廢墟中發現一根 30 公分長的肱骨

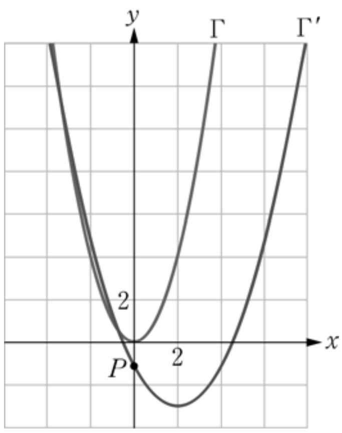
(1) 此肱骨若屬男性，他有多高？

(2) 此肱骨若屬女性，她有多高？

解：(1) 男性 $M(x)=2.89x+70.64$，$x=30$ $\Rightarrow M(30)=157.34$ (公分)。

(2) 女性 $F(x)=2.75x+71.48$，$x=30$ $\Rightarrow F(30)=153.98$ (公分)。

5. 已知函數 $y=x^2$ 的圖形 Γ 如右圖，將 Γ 先沿 y 軸壓縮 $\frac{1}{2}$ 倍，再向右平移 2 單位，續向下平移 3 單位後得到 Γ' 的圖形，而 Γ' 所對應的二次函數為 $y=f(x)$。試求 $f(x)$，並求出 Γ' 中的 P 點坐標。



解：$y=x^2 \xrightarrow[\text{壓縮}\frac{1}{2}\text{倍}]{\text{沿 } y \text{ 軸方向}} y=\frac{1}{2}x^2 \xrightarrow{\text{右移2單位}} y=\frac{1}{2}(x-2)^2$

$\xrightarrow{\text{下移3單位}} y=\frac{1}{2}(x-2)^2-3$。

令 $x=0$，$y=-1$，$P(0,-1)$。

6. 求出下列二次函數的頂點及對稱軸，並概略地描出它們的圖形，並求出其最大值或最小值。

(1) $y=-2x^2-4x+1$。 (2) $y=(x-3)(x+1)$。 (3) $y=-x(x-6)$。

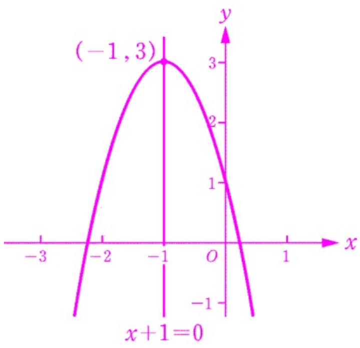
解：(1) $y=-2(x+1)^2+3$。頂點 $(-1,3)$，對稱軸：$x+1=0$，最大值 $=3$，如下圖一。

(2) $y=(x-3)(x+1)=x^2-2x-3$，$y=(x-1)^2-4$。

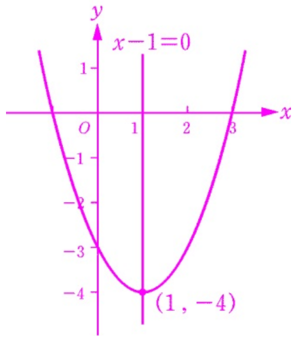
頂點 $(1,-4)$，對稱軸 $x-1=0$，最小值 $=-4$，如下圖二。

(3) $y=-x(x-6)=-x^2+6x=-(x-3)^2+9$。

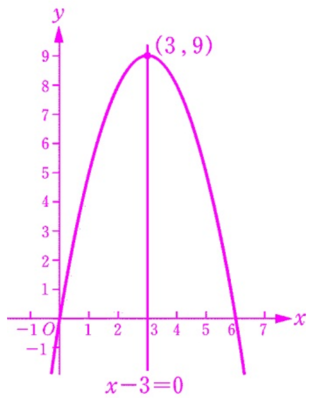
頂點 $(3,9)$，對稱軸 $x-3=0$，最大值 $=9$，如下圖三。



圖一



圖二



圖三

7. 求下列二次函數在閉區間上的最大值及最小值。

(1) $f(x)=3x^2-12x+7$　$(0\le x\le 5)$。

(2) $g(x)=-2x^2-4x+1$　$(-5\le x\le -2)$。

解：(1) $f(x)=3(x-2)^2-5$，

$0\le x\le 5$。

最大值$=22$。（當 $x=5$）

最小值$=-5$。（當 $x=2$）

如右圖一。

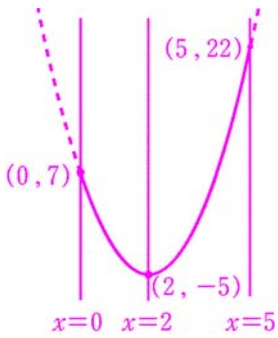
(2) $g(x)=-2(x+1)^2+3$，

$-5\le x\le -2$。

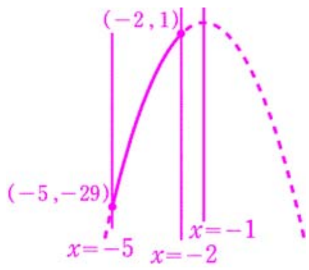
最大值$=1$。（當 $x=-2$）

最小值$=-29$。（當 $x=-5$）

如右圖二。



圖一



圖二

8. 若二次函數 $y=f(x)$ 的圖形通過三點 $(-1,0)$，$(3,0)$，$(5,6)$，求

(1) 對稱軸。　　(2) $f(x)$ 與其最大值或最小值。

解：(1) $\because f(-1)=f(3)=0$，$f(5)=6$　$\therefore$ 對稱軸為 $x-1=0$。

(2) 可令 $f(x)=a(x-1)^2+h$，

$$\begin{cases} f(-1)=0 \\ f(5)=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a+h=0 \\ 16a+h=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ h=-2 \end{cases}$$

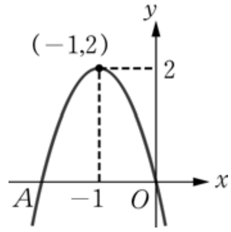
$\therefore f(x)=\dfrac{1}{2}(x-1)^2-2$，最小值$=-2$。

9. 二次函數 $y=f(x)$ 的圖形如右圖所示。

(1) 寫出 A 點坐標。

(2) 求出 $f(x)$。

(3) 寫出使 y 坐標為正數的 x 範圍。



解：(1)(2) $\because$ 頂點 $(-1,2)$

可令 $f(x)=a(x+1)^2+2$，又 $f(0)=0$ $\quad\therefore a=-2$

故 $f(x)=-2(x+1)^2+2=-2x^2-4x$ $\quad\therefore A(-2,0)$

(3) 看圖可知 $-2<x<0$ 時，$y>0$。

10. 設 $f(x)=(x-1)^2+(x-2)^2+(x-3)^2+(x-4)^2+(x-5)^2$（計 5 項完全平方）。試求 $f(x)$ 的最小值及對應的 x 值。

解：$f(x)=5x^2-2(1+2+\cdots+5)x+(1^2+2^2+\cdots+5^2)$

$$=5\left[x^2-\frac{2}{5}(1+2+\cdots+5)x+\left(\frac{1+2+\cdots+5}{5}\right)^2\right]+(1^2+2^2+\cdots+5^2)-\frac{(1+2+\cdots+5)^2}{5}$$

$$=5\left(x-\frac{1+2+\cdots+5}{5}\right)^2+\frac{50}{5}。$$

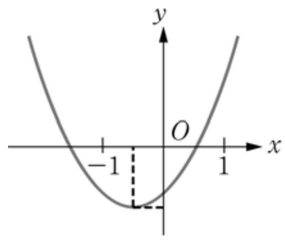
$\therefore$ 當 $x=\dfrac{1+2+\cdots+5}{5}=3$ 時，$f(3)=10$ 最小。

B. 挑戰題

1. 已知二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形，如右圖，試判別下列各式的正、負。

(1) 各項係數 a，b，c。 (2) $a+b+c$，$a-b+c$。

(3) b^2-4ac。



解：(1) $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$。

開口向上 $\Rightarrow a>0$，$\dfrac{-b}{2a}<0\Rightarrow b>0$，圖形與 y 軸交於 $(0，c)\Rightarrow c<0$。

(2) $f(1)=a+b+c>0$，$f(-1)=a-b+c<0$。

(2) $y=f(x)$ 與 x 軸有兩個交點 $\Longleftrightarrow b^2-4ac>0$。

2. 若二次函數 $y=2x^2+x+k$ 圖形恆在直線 $y=3x-1$ 的上方，試求實數 k 取值的範圍。

解：$\because$ $y=2x^2+x+k$ 的圖形恆在 $y=3x-1$ 上方

$\therefore$ $2x^2+x+k>3x-1$ 恆成立

$2x^2-2x+(k+1)>0$ 恆成立

$\therefore$ $(-2)^2-4\times 2(k+1)<0$

$\therefore$ $k>\frac{-1}{2}$