

1-2 式的運算

A. 基本能力題

1. 求出下列各式中 x 的值：

(1) $|2x-3|=5$ 。

(2) $|x+1|=|x-3|$ 。($|x+1|=|x-(-1)|$ 表 x 與 (-1) 的距離)

解：(1) $2x-3=\pm 5 \Rightarrow x=4$ 或 -1 。

(2) $(x+1)^2=(x-3)^2 \Rightarrow 8x=8 \Rightarrow x=1$ 。

2. 求出下列各式中 x 的範圍：

(1) $|2x-3|<5$ 。

(2) $|x+1|<|x-3|$ 。

解：(1) $|2x-3|<5 \Rightarrow -5<2x-3<5 \Rightarrow -2<2x<8 \Rightarrow -1<x<4$ 。

(2) $|x+1|<|x-3| \Rightarrow (x+1)^2<(x-3)^2$
 $\Rightarrow 2x+1<-6x+9 \Rightarrow 8x<8 \Rightarrow x<1$ 。

3. 計算 $2001 \times 2002 - 1999 \times 2004$ 。

解：設 $a=2000$ ，

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (a+1)(a+2) - (a-1)(a+4) \\ &= (a^2+3a+2) - (a^2+3a-4) \\ &= 6。 \end{aligned}$$

4. 化簡下列分式：

(1) $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ 。

(2) $\frac{a^2-b^2}{ab} - \frac{ab-b^2}{ab-a^2}$ 。

解：(1) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$ ，故 $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{2ab}{a+b}$ 。

(2) 原式 $= \frac{a^2-b^2}{ab} + \frac{b(b-a)}{a(b-a)} = \frac{a^2-b^2}{ab} + \frac{b}{a} = \frac{a^2}{ab} = \frac{a}{b}$ 。

5. 化簡下列根式：

(1) $\sqrt{4\frac{25}{36}}$ 。

(2) $\frac{5+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ 。

(3) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$ 。

(4) $\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}$ 。

(5) $\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2} - 2}$ 。($0 < a < 1$)

解：(1) $\sqrt[4]{\frac{25}{36}} = \sqrt{\frac{169}{36}} = \frac{13}{6}$ 。

(2) $\frac{5+2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{(5+2\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 10+4\sqrt{3}-5\sqrt{3}-6 = 4-\sqrt{3}$ 。

(3) 原式 $= \sqrt{(5+4)-2\sqrt{5 \times 4}} = \sqrt{5}-2$ 。

(4) 原式 $= \frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{(2+1)-2\sqrt{2 \times 1}}} = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$ 。

(5) 原式 $= \sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2} = \left|a-\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{a}-a$ 。(0 < a < 1)

6. 設 $A(2)$ ， $B(12)$ 是數線上給定的兩點，點 $P(x)$ 介於 A, B 之間，若 $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{4}{7}$ ，

求 x 的值。

解：因 $\frac{x-2}{12-x} = \frac{4}{7}$ ， $48-4x=7x-14$ ，故 $x = \frac{62}{11}$ 。

B. 挑戰題

1. 分解因式：(1) $8x^3+125$ 。 (2) x^4-16 。

解：(1) $(2x)^3+5^3 = (2x+5)(4x^2-10x+25)$ 。

(2) $x^4-2^4 = (x^2-2^2)(x^2+4) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$ 。

2. (1) 說出 $|x-1|+|x-2|$ 的幾何意涵。(x 是任意實數)

(2) 解 $|x-1|+|x-2|=5$ 。

(3) 解不等式： $|x-1|+|x-2| \leq 5$ 。

解：(1) 數線上，點 x 到 1 與 2 之距離和。

(2) $x=4$ 或 -1 。

(3) $-1 \leq x \leq 4$ 。

