1-1　數與數線

A. 基本能力題

1. 從下列各組數中，選出有理數與無理數。

(1) 1.41421，1.732，3.14159，π，$\sqrt{12}$，$\sqrt{40}$，$\sqrt{3^2}$，$\sqrt{2^3}$。

(2) 12.1，$1.2\overline{1}$，$1.\overline{21}$，$\sqrt{121}$，$\sqrt{1.21}$，$\sqrt{12.1}$。

解：

題號	有理數	無理數
(1)	1.41421，1.732，3.14159，$\sqrt{3^2}$	π，$\sqrt{12}$，$\sqrt{40}$，$\sqrt{2^3}$
(2)	12.1，$1.2\overline{1}$，$1.\overline{21}$，$\sqrt{121}$，$\sqrt{1.21}$	$\sqrt{12.1}$

註：$\sqrt{1.21}=\sqrt{\dfrac{121}{100}}=\dfrac{11}{10}$；$\sqrt{12.1}=\sqrt{\dfrac{121}{10}}=\dfrac{11}{\sqrt{10}}$。

2. 寫出介於 $\dfrac{1}{5}$ 與 $\dfrac{1}{4}$ 之間且形如 $\dfrac{k}{200}$ 之所有的有理數（k 是自然數）。

解：$\dfrac{1}{5}=\dfrac{40}{200}<\dfrac{k}{200}<\dfrac{50}{200}=\dfrac{1}{4}$，$k=41$，$42$，$\cdots$，$49$。

3. 應用“實數的運算性質”計算 $536\times0.52-364\times0.48+364\times0.52-536\times0.48$。

解：原式 $=(536+364)\times0.52-(364+536)\times0.48=(536+364)(0.52-0.48)$

$=900\times0.04=36$。（運算律之活用）

4. 將下列循環小數表成最簡分數 $\dfrac{m}{n}$（m 與 n 為自然數，且互質）。

(1) $0.\overline{5}$。　(2) $1.\overline{36}$。　(3) $0.3\overline{58}$。

解：(1) $0.\overline{5}=\dfrac{5}{9}$。

(2) $1.\overline{36}=1+\dfrac{36}{99}=\dfrac{15}{11}$。

(3) $0.3\overline{58}=\dfrac{358-3}{990}=\dfrac{355}{990}=\dfrac{71}{198}$。

5. 計算下列各式，並將答案表成十進位數。

(1) $0.\overline{3}+0.\overline{6}$。　(2) $0.\overline{3}\times0.\overline{6}$。

解：(1) $0.\overline{3}+0.\overline{6}=\dfrac{3}{9}+\dfrac{6}{9}=1$。　(2) $0.\overline{3}\times0.\overline{6}=\dfrac{3}{9}\times\dfrac{6}{9}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}=0.\overline{2}$。

B. 挑戰題

1. 設 $a=\sqrt{21}$，$b=\sqrt{21+\sqrt{21}}$，試問：

(1) a 最接近哪一個整數？說出道理。

(2) b 最接近哪一個整數？說出道理。

解：(1) $4^2<a^2=21<5^2\Rightarrow 4<\sqrt{21}<5$，又 $(\frac{4+5}{2})^2=(4.5)^2=20.25$

$\Rightarrow 4.5<\sqrt{21}<5$，$a=\sqrt{21}$ 最接近 5。

(2) $\sqrt{21+4}<b=\sqrt{21+\sqrt{21}}<\sqrt{21+5}\Rightarrow 5<b<\sqrt{26}$，

又 $5.5^2=30.25>26$，故 $5<b<\sqrt{26}<5.5$，b 最接近 5。

2. 已知$\sqrt{2}$是無理數，說明 $5-3\sqrt{2}$ 仍是無理數。

〔提示：設 $a=5-3\sqrt{2}$，則$\sqrt{2}=\frac{1}{3}(5-a)$。〕

解：若 $5-3\sqrt{2}$ 是有理數，令 $5-3\sqrt{2}=a$（a 是有理數），則$\sqrt{2}=\frac{5-a}{3}$，

因$\frac{5-a}{3}$仍是有理數，導致“$\sqrt{2}$是有理數的矛盾結果”，故 $5-3\sqrt{2}$ 仍是無理數。

3. 下列敘述中，“正確的”要說出道理，“不正確的”要舉出反例。

(1) 若 r 是正無理數，則$\sqrt{r}$是無理數。〔提示：令 $a=\sqrt{r}$，則 $r=a^2$。〕

(2) 若$\sqrt{r}$是無理數，則 r 是無理數。

解：(1) 正確。若$\sqrt{r}\in\boldsymbol{Q}$，則 $r=(\sqrt{r})^2\in\boldsymbol{Q}$，$\rightarrow\leftarrow$，故$\sqrt{r}$是無理數。

(2) 不正確。如$\sqrt{10}$是無理數，而 10 是有理數。

4. 設 $x>0$，求 $x+\frac{1}{x}$ 之最小值及對應的 x 值。

解：由算幾不等式知 $x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$。

當 $x=\frac{1}{x}$ 時，即 $x=1$ 時，$x+\frac{1}{x}$ 的最小值為 2。