# 第 16 回　解答

## 一、多重選擇題

1.(1)(5)　2.(2)(3)(5)

## 二、填充題

1. $x<1$ 或 $x>\dfrac{8}{3}$　2. 14　3. 3　4. $y>x>z$　5. $(2,-2)$　6. 61

《解析》

## 一、多重選擇題

1. (1)(2) 由算幾不等式：$\dfrac{a+2b+\frac{3}{2}c+\frac{3}{2}c}{4}\geq\sqrt[4]{a\cdot 2b\cdot\frac{3}{2}c\cdot\frac{3}{2}c}$

$\Rightarrow \dfrac{12}{4}\geq\sqrt[4]{\dfrac{9}{2}abc^2}\Rightarrow 3^4\geq\dfrac{9}{2}abc^2\Rightarrow abc^2\leq 18$

$\therefore abc^2$ 的最大值 18，此時 $a=2b=\dfrac{3}{2}c=3$，即 $(a,b,c)=(3,\dfrac{3}{2},2)$

(3) 由柯西不等式：$(a^2+b^2+c^2)(1^2+2^2+3^2)\geq(a+2b+3c)^2$

$\Rightarrow (a^2+b^2+c^2)\cdot 14\geq 12^2\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq\dfrac{72}{7}$　$\therefore a^2+b^2+c^2$ 的最小值 $\dfrac{72}{7}$

(4)(5) 由柯西不等式：$[(\sqrt{a})^2+(\sqrt{2b})^2+(\sqrt{3c})^2][(\dfrac{1}{\sqrt{a}})^2+(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{b}})^2+(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{c}})^2]\geq(1+2+3)^2$

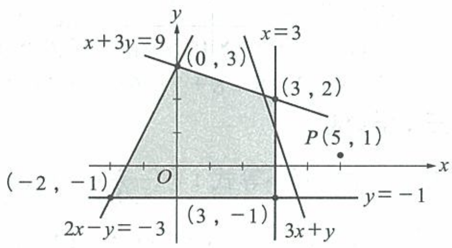
$\Rightarrow 12\cdot(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c})\geq 36\Rightarrow\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}\geq 3$　$\therefore \dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}$ 的最小值 3

此時存在實數 $t$，使得 $\sqrt{a}=\dfrac{1}{\sqrt{a}}t$，$\sqrt{2b}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{b}}t$，$\sqrt{3c}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{c}}t$，即 $a=b=c=t$

$\therefore (a,b,c)=(2,2,2)$

故選(1)(5)

2. 畫出可行解區域，並標出頂點，如右圖




(1) 可行解區域的面積為 $\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}0 & -2 & 3 & 3 & 0\\ 3 & -1 & -1 & 2 & 3\end{vmatrix}\right|$

$=\dfrac{1}{2}|(2+6+9)-(-6-3-3)|=\dfrac{29}{2}$

(2)(3) 由上圖知當 $(x,y)=(3,2)$ 時，$3x+y$ 有最大值 11

當 $(x,y)=(-2,-1)$ 時，$3x+y$ 有最小值 $-7$

(4)(5) $\dfrac{y-1}{x-5}$ 表與定點 $P(5,1)$ 連線的斜率，由上圖知，

當 $(x,y)=(3,2)$ 時，$\dfrac{y-1}{x-5}$ 有最小值 $\dfrac{-1}{2}$

當 $(x,y)=(3,-1)$ 時，$\dfrac{y-1}{x-5}$ 有最大值 1

故選(2)(3)(5)

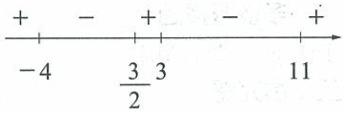
## 二、填充題

1. $\because f(x)>0$ 的解為 $-2<x<3$　$\therefore$設 $f(x)=a(x+2)(x-3)$ 且 $a<0$

$\Rightarrow f(3x-5)=a(3x-5+2)(3x-5-3)=a(3x-3)(3x-8)<0$

$\Rightarrow (x-1)(3x-8)>0$，得解為 $x<1$ 或 $x>\dfrac{8}{3}$

2. 原式：$\dfrac{(x-3)(x-11)}{(2x-3)(x+4)}\le 0 \Rightarrow (x+4)(2x-3)(x-3)(x-11)\le 0$，但 $x\neq -4$，$\dfrac{3}{2}$




由右圖得 $-4<x<\dfrac{3}{2}$ 或 $3\le x\le 11$

在此範圍內的整數有 −3～1，3～11，共 14 個

3. 設 $2x+y=k$

$\Rightarrow y=k-2x$ 代入須滿足的方程式：$x^2+x(k-2x)+2(k-2x)^2+7x-11=0$

整理得 $7x^2+7(1-k)x+(2k^2-11)=0$ $\because x$ 有實數解 $\therefore D\ge 0$

$7^2(1-k)^2-4\times 7\times(2k^2-11)\ge 0 \Rightarrow 7(k^2-2k+1)-4(2k^2-11)\ge 0$

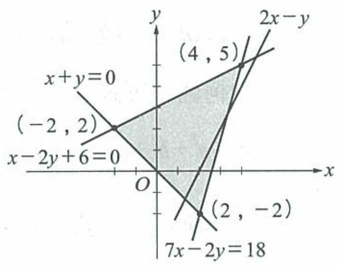
$\Rightarrow -k^2-14k+51\ge 0 \Rightarrow k^2+14k-51\le 0 \Rightarrow (k-3)(k+17)\le 0 \Rightarrow -17\le k\le 3$

故 $2x+y$ 的最大值為 3

4. $\because a>b>1$ $\therefore \log_3 a$，$\log_3 b$ 均大於 0，由算幾不等式：$\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$

$\Rightarrow \log_3\dfrac{a+b}{2}>\log_3\sqrt{ab}=\dfrac{1}{2}\log_3 ab=\dfrac{1}{2}(\log_3 a+\log_3 b)$ $\therefore y>x$

同理 $\dfrac{\log_3 a+\log_3 b}{2}>\sqrt{\log_3 a\cdot\log_3 b}=(\log_3 a\cdot\log_3 b)^{\frac{1}{2}}$ $\therefore x>z \Rightarrow$ 故 $y>x>z$



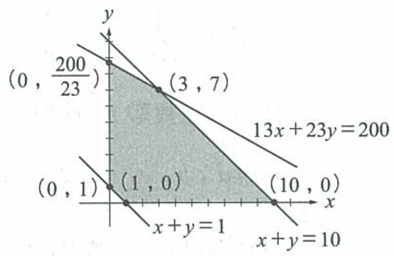

5. 畫出可行解區域，並標出頂點，如右圖所示

由右圖知 $2x-y$ 在 $(x，y)=(2，-2)$ 時，有最大值 6

6. 設橘子買 $x$ 個，梨子買 $y$ 個，

限制條件為

$$\begin{cases} x\ge 0，y\ge 0 \text{ 且 } x，y \text{ 為整數} \\ 13x+23y\le 200 \\ 1\le x+y\le 10 \end{cases}$$




畫出可行解區域，並標出頂點，

如右圖所示

可能的買法即可行解區域內的格子點

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1～8 | 0～8 | 0～7 | 0～7 | 0～6 | 0～5 | 0～4 | 0～3 | 0～2 | 0，1 | 0 |

共有 $8+9+8+8+7+6+5+4+3+2+1=61$ 種買法

## 三、計算題

1. (1) 由柯西不等式：$\left[\left(\dfrac{x}{\sqrt{80}}\right)^2+\left(\dfrac{y}{\sqrt{20}}\right)^2\right]\left[(\sqrt{80})^2+(-\sqrt{20})^2\right]\ge (x-y)^2$

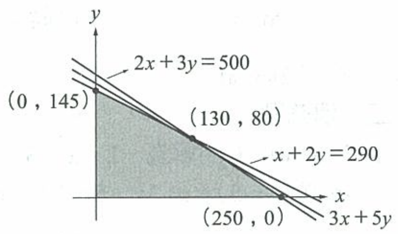
$\Rightarrow (x-y)^2\le 1\cdot 100 \Rightarrow -10\le x-y\le 10$ $\therefore x-y$ 的最大值為 10

(2) 最大值發生時，存在實數 $t$，使得 $\dfrac{x}{\sqrt{80}}=\sqrt{80}\,t$，$\dfrac{y}{\sqrt{20}}=-\sqrt{20}\,t$，即 $x=80t$，$y=-20t$

代入 $x-y=10 \Rightarrow 100t=10 \Rightarrow t=\dfrac{1}{10}$ $\therefore (x，y)=(8，-2)$

2. (1)(2) 設住宅型 $x$ 戶，別墅型 $y$ 戶，限制條件為

$$\begin{cases} x\ge 0，y\ge 0 \text{ 且 } x，y \text{ 為整數} \\ 40x+60y\le 10000 \\ 200x+400y\le 58000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0，y\ge 0 \\ 2x+3y\le 500 \\ x+2y\le 290 \end{cases}$$




畫出可行解區域，並標出頂點，

如右圖所示，而目標函數為

$(500-200)\,x$ 萬 $+(900-400)\,y$ 萬 $=(3x+5y)\times 100$ 萬

由圖得出當 $(x，y)=(130，80)$ 時，目標函數有最大值 $790\times 100$ 萬 = 7 億 9000 萬

故 $(m，n)=(130，80)$，最大利潤為 7 億 9000 萬元