第 14 回　解答

一、多重選擇題

▒ (3)(5)

二、填充題

1. $-2<x<5$　2. $-5\le x\le 1$ 或 $x\ge 3$　3. $x>4$ 或 $x<-3$ 或 $x=-1$　4. $x<-3$ 或 $x<5$

5. $\begin{cases}6x-\ \ y<13\\3x+2y\ge 4\\\qquad\ \ y\le 5\end{cases}$　6. $-1\le k<3$　7. $\dfrac{4}{5}$　8. 0.7960

《解析》

一、多重選擇題

▒ (1) $-x^2+3x+28<0\Rightarrow x^2-3x-28>0\Rightarrow (x+4)(x-7)>0$

　$\therefore$解為 $x<-4$ 或 $x>7$

(2) $x^2+8x+16>0\Rightarrow (x+4)^2>0$　$\therefore x$ 是不為 -4 的其他實數

(3) $x^2-6x+9\le 0\Rightarrow (x-3)^2\le 0$ 的解為 $x=3$，與 $x^2-6x+9=0$ 的解相同

(4) $x^2-2x-2=0$ 的兩根為 $\dfrac{2\pm\sqrt{4+8}}{2}=1\pm\sqrt{3}$

　$\therefore x^2-2x-2>0$ 的解為 $x<1-\sqrt{3}$ 或 $x>1+\sqrt{3}$

(5) $x^2-4x+6=(x-2)^2+2\ge 2$　$\therefore x^2-4x+6<0$ 沒有實數解

故選(3)(5)

二、填充題

1. $(x+1)(x-2)<0$ 的解為 $-1<x<2\Rightarrow x^2-x-2<0$ 與 $ax^2+x+(a+b)>0$ 有相同的解

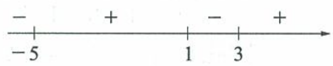
　$\therefore a=-1$，$a+b=2\Rightarrow b=3$ 代入所求不等式得 $x^2-3x-10<0$

　$\Rightarrow (x+2)(x-5)<0$，得解為 $-2<x<5$

2. $x^2+2x-15=(x-3)(x+5)$，而 x^2+2x+5 恆正

　故所求不等式為 $(x-1)(x-3)(x+5)\ge 0$

　由右圖知解為 $-5\le x\le 1$ 或 $x\ge 3$



3. 原式為 $\dfrac{3x+13}{x^2-x-12}+1\ge 0\Rightarrow \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x-12}\ge 0$

　$\Rightarrow \dfrac{(x+1)^2}{(x-4)(x+3)}\ge 0\Rightarrow (x-4)(x+3)(x+1)^2\ge 0$

　$x=-1$ 時滿足不等式，原式形成 $(x-4)(x+3)\ge 0\Rightarrow x\ge 4$ 或 $x\le -3$

　但分母不可為 0　$\therefore x\neq 4,-3$

　故解為 $x>4$ 或 $x<-3$ 或 $x=-1$

4. (1) $x\ge 1$ 時，$x^2-2x-3>3(x-1)\Rightarrow x^2-5x>0$

　　$\Rightarrow x>5$ 或 $x<0$，但 $x\ge 1$　$\therefore x>5$

　(2) $x<1$ 時，$x^2-2x-3>3(1-x)$

　　$\Rightarrow x^2+x-6>0\Rightarrow (x-2)(x+3)>0$

　　$\Rightarrow x>2$ 或 $x<-3$，但 $x<1$　$\therefore x<-3$

　由(1)∪(2)得 $x<-3$ 或 $x>5$

5. 分別求出 $\overleftrightarrow{AB}$，$\overleftrightarrow{BC}$，$\overleftrightarrow{CA}$ 的方程式

　$\overleftrightarrow{AB}$：$6x-y=13$，$\overleftrightarrow{BC}$：$3x+2y=4$，$\overleftrightarrow{CA}$：$y=5$

　而可行解區域在 $\overleftrightarrow{AB}$ 的左半面，$\overleftrightarrow{BC}$ 的右半面，$\overleftrightarrow{CA}$ 的下半面，但不含 $\overleftrightarrow{AB}$，

　故不等式組為 $\begin{cases}6x-\ \ y<13\\3x+2y\ge 4\\\qquad\ \ y\le 5\end{cases}$

6. $P(2k-1, k+2)$ 代入不等式組

$$\begin{cases}(2k-1)+3(k+2)\geq 0\\ 2(2k-1)-(k+2)<5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}5k+5\geq 0\\ 3k<9\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}k\geq -1\\ k<3\end{cases}$$

故 $-1\leq k<3$

7. $\ell(x)=\sqrt{(x-3)^2+4^2}=\sqrt{x^2-6x+25} \Rightarrow \dfrac{\ell(x)}{x}=\dfrac{\sqrt{x^2-6x+25}}{x}=\sqrt{1-\dfrac{6}{x}+\dfrac{25}{x^2}}$

其中 $1-\dfrac{6}{x}+\dfrac{25}{x^2}=25\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{6}{25}\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{3^2}{25^2}\right)+1-\dfrac{9}{25}=25\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{25}\right)^2+\dfrac{16}{25}$

$\therefore \dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{25}$，即 $x=\dfrac{25}{3}$ 時，$\dfrac{\ell(x)}{x}$ 有最小值 $\sqrt{\dfrac{16}{25}}=\dfrac{4}{5}$

8. $2-x>0$ 且 $x+3>0 \Rightarrow -3<x<2$

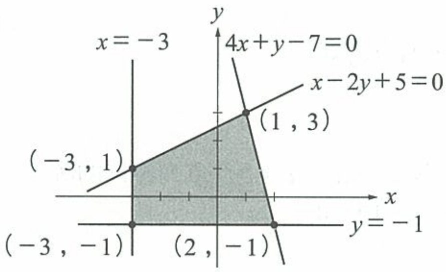
而 $f(x)=\log(2-x)(x+3)=\log(-x^2-x+6)$

$\because -x^2-x+6=-(x+\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{25}{4}$

$\therefore x=\dfrac{-1}{2}$ 時，$f(x)$ 有最大值為 $\log\dfrac{25}{4}=\log\dfrac{100}{16}=\log100-\log16=2-4\times0.3010=0.7960$

三、計算題

1. (1) 圖形如右：



(2) 就 x 討論：

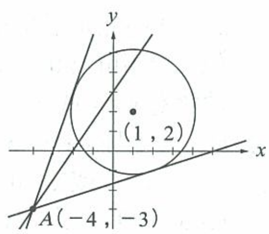
x	-3	-2	-1	0	1	2
y	$-1, 0, 1$	$-1, 0, 1$	$-1, 0, 1, 2$	$-1, 0, 1, 2$	$-1, 0, 1, 2, 3$	-1

因此共有 $3+3+4+4+5+1=20$ 個格子點

2. (1) 方程式整理為 $(x-1)^2+(y-2)^2=10$，表圓心 $(1, 2)$，半徑 $\sqrt{10}$ 的圓

而 $\dfrac{y+3}{x+4}$ 表圓上的點 $P(x, y)$ 與定點 $A(-4, -3)$ 連線的斜率

如右圖所示，極值發生在連線與圓相切時



設連線斜率是 m，則切線方程式為

$y+3=m(x+4) \Rightarrow mx-y+4m-3=0$

由圓心到切線的距離等於半徑

$\dfrac{|m-2+4m-3|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{10} \Rightarrow \dfrac{(5m-5)^2}{m^2+1}=10$

整理得 $3m^2-10m+3=0 \Rightarrow (m-3)(3m-1)=0$

$\therefore m=3$ 或 $\dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{y+3}{x+4}$ 的最大值為 3

(2) 此時切線 $\overleftrightarrow{PA}$：$3x-y=-9$，而圓心與切點 P 連線斜率為 $\dfrac{-1}{3}$

故方程式為 $x+3y=7$，解方程組 $\begin{cases}3x-y=-9\\ x+3y=7\end{cases}$

即點 P 坐標 $(x, y)=(-2, 3)$