第 13 回　解答

一、多重選擇題

(1)(4)

二、填充題

1. $4\sqrt{5}$　2. $\frac{5}{7}$　3. $(\frac{1}{7},\frac{-3}{7},\frac{5}{7})$　4. 18　5. 18　6. 4000π　7. 12　8. $(\frac{9}{7},\frac{6}{7},\frac{-18}{7})$

《解析》

一、多重選擇題

(1) 由算幾不等式：

$$\frac{x+y+z}{3}\geq\sqrt[3]{xyz}\Rightarrow xyz\leq\frac{1}{27}$$

(2) 由柯西不等式：

$$(x^2+y^2+z^2)(1^2+1^2+1^2)\geq(x+y+z)^2\Rightarrow x^2+y^2+z^2\geq\frac{1}{3}$$

(3) 由柯西不等式：

$$[(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2+(\sqrt{z})^2][(\frac{1}{\sqrt{x}})^2+(\frac{1}{\sqrt{y}})^2+(\frac{1}{\sqrt{z}})^2]\geq(1+1+1)^2\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 9$$

(4) 由柯西不等式：

$$[(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2+(\sqrt{z})^2](1^2+1^2+1^2)\geq(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2$$

$$\Rightarrow(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2\leq 3\Rightarrow\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leq\sqrt{3}$$

(5) 由算幾不等式：

$$\frac{\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{y}{x}\cdot\frac{z}{y}\cdot\frac{x}{z}}=1\Rightarrow\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\geq 3$$

故選(1)(4)

二、填充題

1. $\overline{OD}=\overline{AD}-\overline{OA}=10-\frac{10+2}{2}=4$，而 $\overline{CD}$ 是 $\overline{AD}$，$\overline{BD}$ 的幾何平均數

$\Rightarrow\overline{CD}=\sqrt{10\cdot 2}=2\sqrt{5}$

$\therefore\triangle OCD$ 的面積為 $\frac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{5}=4\sqrt{5}$

2. 由柯西不等式：$(x^2+y^2+z^2)[1^2+(-3)^2+5^2]\geq(x-3y+5z)^2$

$\Rightarrow(x^2+y^2+z^2)\cdot 35\geq 5^2\Rightarrow x^2+y^2+z^2\geq\frac{5}{7}$

3. 有最小值時，存在實數 t 使得 $x=t$，$y=-3t$，$z=5t$ 代入 $x-3y+5z=5$

得 $35t=5\Rightarrow t=\frac{1}{7}$　$\therefore$序組$(x,y,z)=(\frac{1}{7},\frac{-3}{7},\frac{5}{7})$

4. 由算幾不等式：$\frac{\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}x+2y+z}{4}\geq\sqrt[4]{\frac{3}{2}x\cdot\frac{3}{2}x\cdot 2y\cdot z}\Rightarrow\frac{12}{4}\geq\sqrt[4]{\frac{9}{2}x^2yz}$

$\Rightarrow 3^4\geq\frac{9}{2}x^2yz\Rightarrow x^2yz\leq 18$

5. 由柯西不等式：

$$[(\sqrt{a})^2+(\sqrt{2b})^2+(\sqrt{3c})^2][(\frac{1}{\sqrt{a}})^2+(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b}})^2+(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{c}})^2]\geq(1+2+3)^2$$

$$\Rightarrow 2\cdot(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c})\geq 36\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\geq 18$$

6. 設 $\overline{AB}=x$，$\overline{BC}=y$

$\therefore x+y=30$，而直圓柱的體積為 πx^2y

由算幾不等式：$\dfrac{\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}+y}{3}\geq\sqrt[3]{\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{x}{2}\cdot y}\Rightarrow 10\geq\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}x^2y}\Rightarrow\dfrac{1}{4}x^2y\leq 1000\Rightarrow x^2y\leq 4000$

$\therefore$直圓柱的最大體積為 4000π

7. 設此四人的身高為 176，x，y，z　$\therefore 176+x+y+z=170\times 4\Rightarrow x+y+z=504$

變異數為 $\dfrac{1}{4}$〔$6^2+(x-170)^2+(y-170)^2+(z-170)^2$〕

由柯西不等式：

$[(x-170)^2+(y-170)^2+(z-170)^2](1^2+1^2+1^2)\geq[(x-170)+(y-170)+(z-170)]^2$

$\Rightarrow(x-170)^2+(y-170)^2+(z-170)^2\geq\dfrac{1}{3}(x+y+z-510)^2=\dfrac{1}{3}\times(-6)^2=12$

$\therefore$變異數的最小值為 $\dfrac{1}{4}(6^2+12)=12$

8. 設 $\vec{a}=(x, y, z)$，由 $|\vec{a}|=3$ 知 $x^2+y^2+z^2=9$，而 $\vec{a}\cdot\vec{b}=3x+2y-6z$

由柯西不等式：$(x^2+y^2+z^2)[3^2+2^2+(-6)^2]\geq(3x+2y-6z)^2$

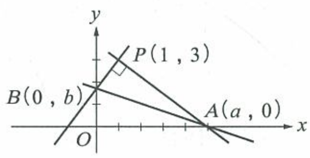
$\Rightarrow(3x+2y-6z)^2\leq 9\cdot 49\Rightarrow -21\leq 3x+2y-6z\leq 21$

$\therefore\vec{a}\cdot\vec{b}$ 的最大值為 21，此時存在實數 t，使得 $x=3t$，$y=2t$，$z=-6t$

代入 $3x+2y-6z=49t=21$　$\therefore t=\dfrac{3}{7}\Rightarrow\vec{a}=\left(\dfrac{9}{7}, \dfrac{6}{7}, \dfrac{-18}{7}\right)$

三、計算題

1. (1) 設 $A(a, 0)$，$B(0, b)$，a，$b>0$，作圖如右



$\because\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB}$　$\therefore(a-1, -3)\cdot(-1, b-3)=0$

$\Rightarrow -a+1-3b+9=0\Rightarrow a+3b=10$

而$\triangle OAB$ 的面積為 $\dfrac{1}{2}ab$

由算幾不等式：$\dfrac{a+3b}{2}\geq\sqrt{3ab}\Rightarrow 5\geq\sqrt{3ab}$

$\Rightarrow ab\leq\dfrac{25}{3}$，故$\triangle OAB$ 的最大面積為 $\dfrac{25}{6}$

(2) 有最大面積時，$a=3b=5$，即 $A(5, 0)$，$B\left(0, \dfrac{5}{3}\right)$

$\therefore$直線 AB 的方程式為 $\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{\frac{5}{3}}=1\Rightarrow x+3y=5$

2. (1) S 整理為 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=12$

由柯西不等式：

$[(x-1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2][1^2+(-1)^2+1^2]\geq[(x-1)-(y-2)+(z+3)]^2$

$\Rightarrow(x-y+z+4)^2\leq 12\cdot 3\Rightarrow -6\leq x-y+z+4\leq 6$

$\Rightarrow -15\leq x-y+z-5\leq -3\Rightarrow 3\leq|x-y+z-5|\leq 15$

而 $d(P, E)=\dfrac{|x-y+z-5|}{\sqrt{3}}$　$\therefore$最長距離為 $\dfrac{15}{\sqrt{3}}=5\sqrt{3}$

(2) 此時存在實數 t，使得 $x-1=t$，$y-2=-t$，$z+3=t$

即 $x=1+t$，$y=2-t$，$z=-3+t$ 代入 $x-y+z-5=(1+t)-(2-t)+(-3+t)-5=-15$

$\Rightarrow 3t-9=-15\Rightarrow t=-2$

$\therefore x=-1$，$y=4$，$z=-5$，即點 P 坐標為 $(-1, 4, -5)$