第 2 回　解答

一、多重選擇題

1.(2)(4)　2.(1)(3)(4)

二、填充題

1. 41　2. $\frac{12}{5}$　3. $\frac{31}{3}$　4. $\frac{53}{512}$　5. 42　6. $\frac{1568}{2187}$

------------------------《解析》------------------------

一、多重選擇題

1. (1) $P(\{X=2\})=C_2^6(\frac{1}{2})^4(\frac{1}{2})^2=\frac{15}{64}$

(2) $P(\{X>2\})$

$=P(\{X=3\})+P(\{X=4\})+P(\{X=5\})+P(\{X=6\})$

$=C_3^6(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^3+C_4^6(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^4+C_5^6(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})^5+C_6^6(\frac{1}{2})^6$

$=\frac{1}{64}(20+15+6+1)=\frac{21}{32}$

(3) $E(X)=6\cdot\frac{1}{2}=3$

(4) $Var(X)=6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

(5) $\sigma_X=\sqrt{Var(X)}=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

故選(2)(4)

2. ∵ X，Y 是獨立的隨機變數

∴(1)、(3)為真，但 $Var(XY)=Var(X)Var(Y)$ 並不成立

(4) $E(2X-3Y)=E(2X)+E(-3Y)=2E(X)-3E(Y)$

(5) $Var(2X-3Y)=Var(2X)+Var(-3Y)=4Var(X)+9Var(Y)$

故選(1)(3)(4)

二、填充題

1. $E(3X+2)=3E(X)+2=20\Rightarrow E(X)=6$

$Var(2X-3)=Var(2X)=4Var(X)=20\Rightarrow Var(X)=5$

又 $Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

∴ $E(X^2)=5+6^2=41$

2. $Var(X)=9\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{36}{25}\Rightarrow Var(2X+3)=4Var(X)=\frac{144}{25}$

∴ $2X+3$ 的標準差為 $\sqrt{\frac{144}{25}}=\frac{12}{5}$

3. $E(X)=5\cdot\frac{1}{6}+7\cdot\frac{2}{6}+10\cdot\frac{2}{6}+15\cdot\frac{1}{6}=9$

$E(X^2)=25\cdot\frac{1}{6}+49\cdot\frac{2}{6}+100\cdot\frac{2}{6}+225\cdot\frac{1}{6}$

$=\frac{1}{6}(25+98+200+225)=\frac{274}{3}$

∴ $Var(X)=\frac{274}{3}-9^2=\frac{31}{3}$

4. $P(\{X\le 2\})=P(\{X=0\})+P(\{X=1\})+P(\{X=2\})$

$$=C_0^5(\frac{1}{4})^5+C_1^5(\frac{1}{4})^4(\frac{3}{4})+C_2^5(\frac{1}{4})^3(\frac{3}{4})^2$$

$$=\frac{1+5\cdot 3+10\cdot 3^2}{4^5}=\frac{106}{1024}=\frac{53}{512}$$

5. 以 X_1，X_2 分別表示兩次取到的號碼，則 $X=X_1+X_2$ 且 X_1，X_2 為獨立

$E(X_1)=E(X_2)=\frac{1}{13}(1+2+3+\cdots\cdots+13)=7$

而 $E(X_1{}^2)=\frac{1}{13}(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+13^2)=\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{6}\cdot 13\cdot 14\cdot 27=63$

$\therefore Var(X_1)=Var(X_2)=63-7^2=14$

故 $E(X)=E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)=14$，

$Var(X)=Var(X_1+X_2)=Var(X_1)+Var(X_2)=28$

$\therefore a+b=14+28=42$

6. $\mu=np=8\times\frac{2}{3}=\frac{16}{3}$，$\sigma=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{8\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}}=\frac{4}{3}$

$\therefore P(\{\frac{16}{3}-\frac{4}{3}\le X\le\frac{16}{3}+\frac{4}{3}\})=P(\{4\le X\le\frac{20}{3}\})$

$$=P(\{X=4\})+P(\{X=5\})+P(\{X=6\})$$

$$=C_4^8(\frac{2}{3})^4(\frac{1}{3})^4+C_5^8(\frac{2}{3})^5(\frac{1}{3})^3+C_6^8(\frac{2}{3})^6(\frac{1}{3})^2$$

$$=\frac{70\cdot 2^4+56\cdot 2^5+28\cdot 2^6}{3^8}=\frac{1568}{2187}$$

三、計算題

1. (1) 一次取三個球，可能取得的紅球數為 1，2，3

機率分別是 $\frac{C_1^3C_2^2}{C_3^5}$，$\frac{C_2^3C_1^2}{C_3^5}$，$\frac{C_3^3}{C_3^5}$，即 $\frac{3}{10}$，$\frac{6}{10}$，$\frac{1}{10}$

$\therefore$期望值為 $1\cdot\frac{3}{10}+2\cdot\frac{6}{10}+3\cdot\frac{1}{10}=\frac{18}{10}=\frac{9}{5}$

(2) 即 $(3，\frac{3}{5})$ 的二項分配　$\therefore$期望值為 $3\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{5}$

2. (1) X 是參數 $(6，\frac{1}{3})$ 的二項分配　$\therefore Var(X)=np(1-p)=6\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

(2) 以 Y_1，Y_2，……，Y_6 表示 6 次分別擲出的點數

$E(Y_1)=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\frac{7}{2}$

$E(Y_1{}^2)=\frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)=\frac{91}{6}$

$\therefore Var(Y_1)=\frac{91}{6}-(\frac{7}{2})^2=\frac{35}{12}=Var(Y_2)=\cdots\cdots=Var(Y_6)$

$\Rightarrow Var(Y)=Var(Y_1+Y_2+\cdots\cdots+Y_6)=Var(Y_1)+Var(Y_2)+\cdots\cdots+Var(Y_6)$

$$=6\times\frac{35}{12}=\frac{35}{2}$$