

第 章 綜合練習

1. 設 x, y, z 均為正數，且 $x+y+z=9$ ，則當序組 $(x, y, z) = \underline{\hspace{2cm}}$ 時，
 $\frac{4}{x} + \frac{9}{y} + \frac{1}{z}$ 有最小值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

解析： $[(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 + (\sqrt{z})^2][(\frac{2}{\sqrt{x}})^2 + (\frac{3}{\sqrt{y}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{z}})^2] \geq (2+3+1)^2$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)(\frac{4}{x} + \frac{9}{y} + \frac{1}{z}) \geq 36$$

$$\Leftrightarrow 9 \times (\frac{4}{x} + \frac{9}{y} + \frac{1}{z}) \geq 36$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{x} + \frac{9}{y} + \frac{1}{z} \geq 4$$

等號在 $\frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{\sqrt{y}}{3} = \frac{\sqrt{z}}{1} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1} = t$ 且 $x+y+z=9$ 時成立

令 $a=2t, b=3t, c=t$ 代入得 $2t+3t+t=9 \Leftrightarrow$ 解之 $t=\frac{3}{2} \Leftrightarrow$ 得 $x=3, y=\frac{9}{2}, z=\frac{3}{2}$

故當序組 $(x, y, z) = (3, \frac{9}{2}, \frac{3}{2})$ 時， $\frac{4}{x} + \frac{9}{y} + \frac{1}{z}$ 有最小值 4

2. 設 $a, b \in \mathbb{R}$ ，則當數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 時， $a^2 + b^2 + (1-2a-3b)^2$ 有最小值為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

解析：設 $c=1-2a-3b \Leftrightarrow 2a+3b+c=1$

原題可視為已知 $2a+3b+c=1$ ，求 $a^2+b^2+c^2$ 之最小值

$$(a^2+b^2+c^2)(2^2+3^2+1^2) \geq (2a+3b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2+c^2) \times 14 \geq 1 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{14}$$

等號在 $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{1} = t$ 且 $2a+3b+c=1$ 時成立

令 $a=2t, b=3t, c=t$ 代入得 $4t+9t+t=1 \Leftrightarrow t=\frac{1}{14} \Leftrightarrow a=\frac{1}{7}, b=\frac{3}{14}, c=\frac{1}{14}$

故當數對 $(a, b) = (\frac{1}{7}, \frac{3}{14})$ 時， $a^2+b^2+(1-2a-3b)^2$ 有最小值為 $\frac{1}{14}$

3. 設 $\triangle ABC$ 三邊長為 $a=\overline{BC}=4$, $b=\overline{CA}=3$, $c=\overline{AB}=5$. 若 P 為三角形內部任一點, 且 P 到 \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{AC} 之垂直距離依次為 x, y, z . 試求 xyz 之最大值为_____, 又此序組 $(x, y, z) = \underline{\hspace{2cm}}$.

解析: $\because \triangle ABC$ 之面積 $=\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$, 又設 $\overline{PD}=x$, $\overline{PE}=y$, $\overline{PF}=z$

則 $\triangle ABC$ 之面積為 $\frac{1}{2} \times 5 \times x + \frac{1}{2} \times 4 \times y + \frac{1}{2} \times 3 \times z = 6 \Rightarrow 5x + 4y + 3z = 12$

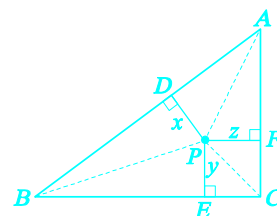
由算術平均數 \geq 幾何平均數知 $\frac{5x+4y+3z}{3} \geq \sqrt[3]{5x \cdot 4y \cdot 3z}$

$$\Rightarrow 60xyz \leq \left(\frac{12}{3}\right)^3 = 64 \Rightarrow xyz \leq \frac{16}{15}$$

等號在 $5x=4y=3z=t$ 且 $5x+4y+3z=12$ 時成立

$$\text{解之得 } x = \frac{4}{5}, y = 1, z = \frac{4}{3}$$

故當序組 $(x, y, z) = \left(\frac{4}{5}, 1, \frac{4}{3}\right)$ 時, xyz 之最大值为 $\frac{16}{15}$



4. 二次不等式 $ax^2 - 2ax + 2a - 5 < 0$ 的解為 $-1 < x < 3$, 則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

解析: 以 $-1 < x < 3$ 之解的不等式為 $(x+1)(x-3) < 0$, 即 $x^2 - 2x - 3 < 0$

$\because ax^2 - 2ax + (2a - 5) < 0$ 的解也為 $-1 < x < 3$

$\therefore ax^2 - 2ax + (2a - 5) < 0$ 與 $x^2 - 2x - 3 < 0$ 為同義不等式

$$\text{故 } \frac{a}{1} = \frac{-2a}{-2} = \frac{2a-5}{-3} \text{ 且 } a > 0, \text{ 交叉相乘解之 } -3a = 2a - 5 \Rightarrow a = 1$$

5. 不等式 $|2x-3| < 5-x^2$ 之解為_____.

解析: (1) 當 $x \geq \frac{3}{2}$ 時, $|2x-3| < 5-x^2 \Rightarrow 2x-3 < 5-x^2$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 8 < 0 \Rightarrow (x+4)(x-2) < 0$$

$$\Rightarrow -4 < x < 2, \text{ 但 } x \geq \frac{3}{2} \therefore \frac{3}{2} \leq x < 2$$

(2) 當 $x < \frac{3}{2}$ 時, $|2x-3| < 5-x^2 \Rightarrow -2x+3 < 5-x^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 < 0$

$$\Rightarrow 1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3}, \text{ 但 } x < \frac{3}{2} \therefore 1 - \sqrt{3} < x < \frac{3}{2}$$

取(1)、(2)之聯集得 $1 - \sqrt{3} < x < 2$

6. 滿足 $\frac{x+y}{2} = \frac{y+z}{3} = \frac{z+x}{7}$ 之實數 x, y, z 恆能使不等式 $x^2 + y^2 + z^2 + a(x+y+z) > -26$ 成立，則實數 a 的範圍為_____。

解析：令 $\frac{x+y}{2} = \frac{y+z}{3} = \frac{z+x}{7} = k$ 則 $\begin{cases} x+y=2k \\ y+z=3k \\ z+x=7k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3k \\ y=-k \\ z=4k \end{cases}$

代入原式得 $9k^2 + k^2 + 16k^2 + a(3k - k + 4k) > -26$ 恆成立

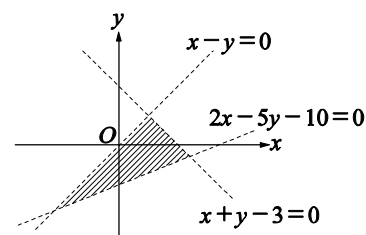
$\Leftrightarrow 26k^2 + 6ak + 26 > 0$ 恆成立

$\therefore D = (6a)^2 - 4 \times 26 \times 26 < 0 \Leftrightarrow 9a^2 < 26 \times 26 \Leftrightarrow -\frac{26}{3} < a < \frac{26}{3}$

7. 如右圖，可用下列哪一組不等式表示？

(A) $\begin{cases} x-y > 0 \\ 2x-5y-10 < 0 \\ x+y-3 > 0 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x-y > 0 \\ 2x-5y-10 > 0 \\ x+y-3 < 0 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x-y < 0 \\ 2x-5y-10 < 0 \\ x+y-3 < 0 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} x-y > 0 \\ 2x-5y-10 < 0 \\ x+y-3 < 0 \end{cases}$ (E) $\begin{cases} x-y > 0 \\ 2x-5y-10 > 0 \\ x+y-3 > 0 \end{cases}$



解析：斜線部分在 $x-y=0$ 之右半平面

在 $2x-5y-10=0$ 之左半平面

在 $x+y-3=0$ 之左半平面，故選(D)

8. 若 $4x-y-7 \leq 0$, $3x-4y+11 \geq 0$, $x+3y-5 \geq 0$ ，則：

(1) $x-y$ 之最大值為_____，最小值為_____。

(2) x^2+y^2 之最大值為_____，最小值為_____。

(3) $\frac{x}{y}$ 之最大值為_____，最小值為_____。

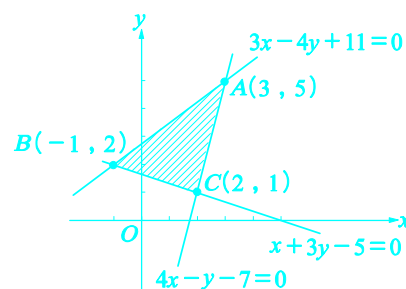
解析：(1)

| (x, y) | $x-y$ |
|-----------|------------------------|
| $(3, 5)$ | -2 |
| $(-1, 2)$ | $-3 \cdots \cdots$ 最小值 |
| $(2, 1)$ | $1 \cdots \cdots$ 最大值 |

故最大值為 1，最小值為 -3

(2) $x^2+y^2 = [\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}]^2$

最大值為 $[\sqrt{(3-0)^2 + (5-0)^2}]^2 = 34$



$$\text{最小值爲 } [d(O, \overrightarrow{BC})]^2 = \left(\frac{|0+0-5|}{\sqrt{10}} \right)^2 = \frac{5}{2}$$

$$(3) \text{ 設 } \frac{x}{y} = m, y = \frac{1}{m}x \Rightarrow \frac{1}{m} \geq \frac{1}{2} \text{ 或 } \frac{1}{m} \leq -2, \therefore -\frac{1}{2} \leq m \leq 2$$

$$\therefore \frac{x}{y} \text{ 的最大值爲 } 2, \text{ 最小值爲 } -\frac{1}{2}$$

9. 欲製造一容積至少 108π 立方公尺的圓柱形無蓋容器，已知底半徑比高多 3 公尺，則半徑至少為_____公尺。

解析：設底半徑為 x 公尺，則高為 $(x-3)$ 公尺，則容積為 $\pi x^2 \times (x-3) \geq 108\pi$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 108 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-6)(x^2+3x+18) \geq 0, \text{ 但 } x^2+3x+18 \text{ 恆正}$$

$$\therefore x-6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 6, \text{ 故半徑至少爲 } 6 \text{ 公尺}$$

10. 某進出口公司有甲、乙兩座儲倉，儲存某種原料，甲倉有原料 48 公噸，乙倉有原料 60 公噸，今公司接到 A、B 兩地訂購原料，分別是訂購 A 地 36 公噸，B 地 44 公噸，進出口公司洽商送貨公司得知運費如右表，單位為元/公噸，問應如何運送，才能使運費最少？

| | A 地 | B 地 |
|----|-------|-------|
| 甲倉 | 500 元 | 600 元 |
| 乙倉 | 650 元 | 700 元 |

解析：設甲倉運 x 公噸至 A 地， y 公噸至 B 地

乙倉運 $(36-x)$ 公噸至 A 地， $(44-y)$ 公噸至 B 地

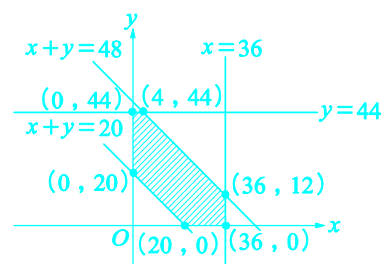
$$\text{由題意知 } \begin{cases} 0 \leq x \leq 36 \\ 0 \leq y \leq 44 \\ x+y \leq 48 \\ (36-x) + (44-y) \leq 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 36 \\ 0 \leq y \leq 44 \\ x+y \leq 48 \\ x+y \geq 20 \end{cases}, \text{ 且 } x, y \text{ 爲整數}$$

欲求 $500x + 600y + (36-x) \cdot 650 + 700 \cdot (44-y)$

$$= -150x - 100y + 54200 \text{ 之最小值}$$

$$\therefore$$

| (x, y) | $-150x - 100y + 54200$ |
|------------|--------------------------------|
| $(0, 20)$ | 52200 |
| $(20, 0)$ | 51200 |
| $(36, 0)$ | 48800 |
| $(36, 12)$ | 47600 \cdots \cdots \text{最小值} |
| $(4, 44)$ | 49200 |
| $(0, 44)$ | 49800 |



亦即甲倉運 36 公噸至 *A* 地，運 12 公噸至 *B* 地；乙倉運 0 公噸至 *A* 地，運 32 公噸至 *B* 地，可使運費最少為 47600 元