1. 某生利用列運算求解方程組時，得$\cdots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -3 \\ 0 & -7 & 10 & b \\ 0 & -1 & c & 8 \end{array}\right] \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$，數字 a，b，c 不慎汙損，則序組（a，b，c）＝________。

解：

依題意知$\begin{cases} x+2y+az=-3 \\ -7y+10z=b \\ -y+cz=8 \end{cases}$之解為$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases}$

代回得$\begin{cases} 1+2+3a=-3 \\ -7+30=b \\ -1+3c=8 \end{cases}$ ⇨ $\begin{cases} a=-2 \\ b=23 \\ c=3 \end{cases}$　故序組（a，b，c）＝（-2，23，3）

2. 若方程組$\begin{bmatrix} a & -2 \\ 1 & a-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$無解，則 $a=$________。

解：方程組$\begin{bmatrix} a & -2 \\ 1 & a-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$無解

亦即$\begin{bmatrix} a & -2 \\ 1 & a-3 \end{bmatrix}$沒有乘法反元素

$\therefore$令$\begin{vmatrix} a & -2 \\ 1 & a-3 \end{vmatrix}=0$ ⇨ $a(a-3)+2=0$

⇨ $a^2-3a+2=0$ ⇨ $(a-1)(a-2)=0$ ⇨ $a=1$ 或 2

3. 若 $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，則滿足 $A^n=I$ 的最小正整數 $n=$________。

解：

$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\frac{3\pi}{2} & \sin\frac{3\pi}{2} \\ -\sin\frac{3\pi}{2} & \cos\frac{3\pi}{2} \end{bmatrix}$

$\therefore A^n=\begin{bmatrix} \cos\frac{3n\pi}{2} & \sin\frac{3n\pi}{2} \\ -\sin\frac{3n\pi}{2} & \cos\frac{3n\pi}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore \cos\frac{3n\pi}{2}=1$，$\sin\frac{3n\pi}{2}=0$ ⇨ $\frac{3n\pi}{2}=2k\pi$，$k\in\mathbb{Z}$

⇨ $3n=4k$ ⇨ $n=\frac{4}{3}k$　當 $k=3$ 時，n 有最小值為 4　故 $n=4$ 為最小正整數

4. 設 A，B，C 皆為 3x3 階矩陣，則下列敘述哪些是正確的？

(A) $AB=BA$ 恆成立

(B) $(AB)C=A(BC)$ 恆成立

(C)若 $AB=O$，則 $A=O$ 或 $B=O$

(D)若 $\det A\neq 0$，且 $AB=AC$，則 $B=C$

(E) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 恆成立．

解：(A) ╳：交換律不恆成立

(B) ○：乘法結合律成立

(C) ╳：例 $A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ ⇨ $AB=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

但 $A\neq O$ 且 $B\neq O$

(D) ○：$\because \det A\neq 0$ $\therefore A^{-1}$ 存在 $\therefore A^{-1}(AB)=A^{-1}(AC)$

⇨ $(A^{-1}A)B=(A^{-1}A)C$ $\therefore B=C$

(E) ╳：交換律不恆成立

$\therefore (A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2\neq A^2+2AB+B^2$

故選(B)(D)

5. 某汽車出租公司專由甲、乙、丙三處機場出租，依以往的慣例，租車的顧客可選在甲、乙、丙三處還車，而其還車地點可能性如右，若剛開始時，甲、乙、丙三處各有 200 輛車，試求：

(1) 經過一段時間後，甲、乙、丙三處各有多少輛車？

(2) 若公司計畫在甲、乙、丙三處之一建立汽車保養廠，你認為在哪一處設立最好？為什麼？

租車處

		甲	乙	丙
還車處	甲	0.8	0.2	0.2
	乙	0.1	0.7	0.3
	丙	0.1	0.1	0.5

解：

(1) 由題意知轉移矩陣為 $A=\begin{bmatrix}0.8&0.2&0.2\\0.1&0.7&0.3\\0.1&0.1&0.5\end{bmatrix}$

設經過一段時間後，甲、乙、丙三處分別有 x，y，z 輛車

則 $\begin{bmatrix}0.8&0.2&0.2\\0.1&0.7&0.3\\0.1&0.1&0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0.8x+0.2y+0.2z=x \\ 0.1x+0.7y+0.3z=y \\ 0.1x+0.1y+0.5z=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+y+z=0 \cdots\cdots ① \\ x-3y+3z=0 \cdots\cdots ② \\ x+y-5z=0 \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①＋②得 $-2y+4z=0$ ……………………④

①＋③得 $2y-4z=0$ ……………………⑤

由④、⑤知令 $z=t \Rightarrow y=2t$ 代入①得 $x=3t$

又 $x+y+z=600$ $\therefore 3t+2t+t=600 \Rightarrow t=100$

故最後甲、乙、丙三處分別有 300，200，100 輛車

(2) 選在甲處設立最好，因爲其還車率最高

6. 方程式 $\begin{vmatrix} 2-x & 4 & -6 \\ 4 & 2-x & -6 \\ -6 & -6 & 12-x \end{vmatrix}=0$ 的解為__________。

解：

$$\begin{vmatrix} 2-x & 4 & -6 \\ 4 & 2-x & -6 \\ -6 & -6 & 12-x \end{vmatrix} \overset{\times 1,\ \times 1}{=} \begin{vmatrix} -x & -x & -x \\ 4 & 2-x & -6 \\ -6 & -6 & 12-x \end{vmatrix} \overset{\times(-1),\ \times(-1)}{=} \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 \\ 4 & -2-x & -10 \\ -6 & 0 & 18-x \end{vmatrix}$$

$=(-x)(-2-x)(18-x)=x(x+2)(x-18)=0$ 故三根爲 0，-2 或 18

7. 將行列式 $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 展開得到多項式 $f(x)$。下列有關 $f(x)$ 的敘述，何者為真？

(A) $f(x)$ 是一個三次多項式 (B) $f(1)=0$ (C) $f(2)=0$ (D) $f(-3)=0$
(E) $f(5)=0$。

解：

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} \overset{\times 1,\ \times 1}{=} \begin{vmatrix} x+3 & 1 & 2 \\ x+3 & x & 2 \\ x+3 & 2 & x \end{vmatrix}=(x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} \overset{\times(-1),\ \times(-1)}{}$$

$$=(x+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix}=(x+3)(x-1)(x-2)$$

$\therefore f(x)$ 是三次多項式，且 $f(x)=0$ 有三根 -3，1 或 2

$\therefore f(-3)=0$，$f(1)=0$，$f(2)=0$

故選(A)(B)(C)(D)

8. 已知 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 三向量所張平行六面體體積為 5，則 $2\vec{a}+3\vec{b}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 三向量所張平行六面體體積為________。

解：令 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$，$\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$，$\vec{c}=(c_1, c_2, c_3)$，則

$$\text{平行六面體體積}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\text{的絕對值}=5$$

又 $2\vec{a}+3\vec{b}=(2a_1+3b_1, 2a_2+3b_2, 2a_3+3b_3)$

$$\therefore\text{平行六面體體積}=\begin{vmatrix} 2a_1+3b_1 & 2a_2+3b_2 & 2a_3+3b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\times(-3)\ \text{的絕對值}$$

$$=\begin{vmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\text{的絕對值}$$

$$=2\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\text{的絕對值}=2\times5=10$$

9. 設 a，b，c 為 $x^3-2x^2+6x-1=0$ 之三根，則 $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}=$________。

解：由根與係數的關係知 $a+b+c=2$，$ab+bc+ca=6$，$abc=1$

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}=(1+a)(1+b)(1+c)+1+1-(1+b)-(1+a)-(1+c)$$

$=1+a+b+c+ab+bc+ca+abc+1+1-1-b-1-a-1-c$

$=ab+bc+ca+abc=6+1=7$

10. 設 π_a：$x-4y+az=10$（a 為常數），E_1：$x-2y+z=5$ 及 E_2：$2x-5y+4z=-3$ 為坐標空間中的三個平面。試問下列哪些敘述是正確的？

(A)存在實數 a 使得 π_a 與 E_1 平行

(B)存在實數 a 使得 π_a 與 E_1 垂直

(C)存在實數 a 使得 π_a，E_1，E_2 交於一點

(D)存在實數 a 使得 π_a，E_1，E_2 交於一直線

(E)存在實數 a 使得 π_a，E_1，E_2 沒有共同交點。

解：(A) $\pi_a // E_1$ ⇨ $(1, -4, a) // (1, -2, 1)$，矛盾　$\therefore$不可能存在 a 使得 $\pi_a // E_1$

(B) $\pi_a \perp E_1$ ⇨ $(1, -4, a)\cdot(1, -2, 1)=0$ ⇨ $1+8+a=0$ ⇨ $a=-9$

$\therefore a=-9$ 時，$\pi_a \perp E_1$

(C) 令 $D\neq 0$，即 $\begin{vmatrix} 1 & -4 & a \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow 5-a\neq 0 \Rightarrow a\neq 5$

$\therefore a\neq 5$ 時，三平面交於一點

(D)(E) 令 $D=0 \Rightarrow a=5 \Rightarrow \begin{cases} x-4y+5z=10 \cdots\cdots① \\ x-2y+z=5 \cdots\cdots② \\ 2x-5y+4z=-3 \cdots\cdots③ \end{cases}$

②－①得 $2y-4z=-5 \cdots\cdots$④

③－①×2 得 $3y-6z=-23 \cdots\cdots$⑤

④×3－⑤×2 得 $0=31$（不合）

$\therefore a=5$ 時，三平面兩兩相交於一線且三交線互相平行

故選(B)(C)(E)