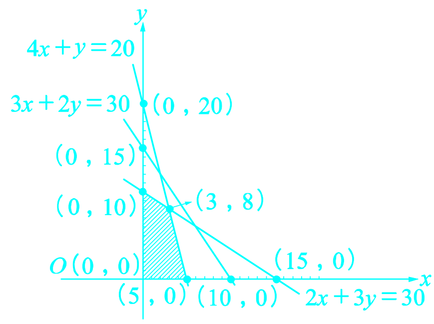
3-3 線性規劃

例題 1

試在聯立不等式 $\begin{cases} 3x+2y\leqq 30 \\ 2x+3y\leqq 30 \\ 4x+y\leqq 20 \\ x\geqq 0，y\geqq 0 \end{cases}$ 的條件下，求 $4x+12y$ 之最大值為________．

解析：



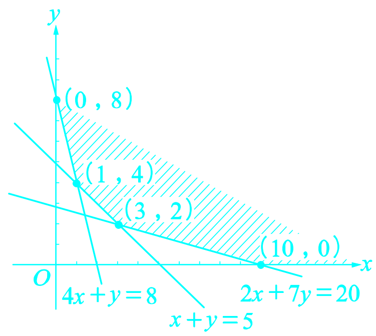
由

$(x，y)$	$4x+12y$
(0，0)	0
(5，0)	20
(3，8)	108
(0，10)	120……最大

故 $4x+12y$ 之最大值爲 120

例題 2

試在聯立不等式 $\begin{cases} 4x+y\geqq 8 \\ x+y\geqq 5 \\ 2x+7y\geqq 20 \\ x\geqq 0 \\ y\geqq 0 \end{cases}$ 的條件下，求 $x+2y$ 之最小值為________．



解析：不等式之圖形如右所示

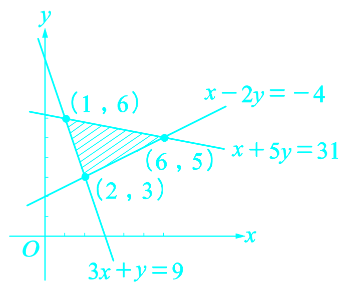
由

$(x，y)$	(0，8)	(1，4)	(3，2)	(10，0)
$x+2y$	16	9	7	10

知 $x+2y$ 之最小值爲 7

例題 3

若 $(x，y)$ 為聯立不等式 $\begin{cases} 3x+y\geqq 9 \\ x-2y\leqq -4 \\ x+5y\leqq 31 \end{cases}$ 所表示圖形上的任一點，且 $P=kx+y$ 在 (1，6) 有極小值時，則 k 的範圍為________．



解析：聯立不等式 $\begin{cases} 3x+y\geqq 9 \\ x-2y\leqq -4 \\ x+5y\leqq 31 \end{cases}$ 之圖形如右圖三角形的區域

其頂點爲 (1，6)，(2，3)，(6，5)

(x, y)	$(1, 6)$	$(2, 3)$	$(6, 5)$
$P = kx + y$	$k+6$	$2k+3$	$6k+5$

$\because P = kx + y$ 在$(1, 6)$有極小值$\Rightarrow \begin{cases} k+6 \leqq 2k+3 \\ k+6 \leqq 6k+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \geqq 3 \\ k \geqq \dfrac{1}{5} \end{cases}$，故 $k \geqq 3$

例題 4

在一個牽涉到兩個未知量 x，y 的線性規劃作業中，有三個限制條件。坐標平面上符合這三個限制條件的區域是一個三角形區域。假設目標函數 $ax+by$（a，b 是常數）在此三角形的一個頂點$(19, 12)$上取得最大值 31，而在另一個頂點$(13, 10)$取得最小值 23。現因業務需要，加入第四個限制條件，結果符合所有限制條件的區域變成一個四邊形區域，頂點少了$(19, 12)$，新增了$(17, 13)$和$(16, 11)$。在這四個限制條件下，請選出正確的選項。

(A) $ax+by$ 的最大值發生在$(17, 13)$　(B) $ax+by$ 的最小值發生在$(16, 11)$

(C) $ax+by$ 的最大值是 30　(D) $ax+by$ 的最小值是 27。　【92.指考甲】

$\boxed{\text{解析}}$：設目標函數 $f(x, y) = ax+by$

則 $f(19, 12) = 19a+12b = 31$

$f(13, 10) = 13a+10b = 23$

$\therefore a = b = 1$，亦即 $f(x, y) = x+y$

又 $f(17, 13) = 17+13 = 30$

$f(16, 11) = 16+11 = 27$

$\therefore$後來的最大值爲 30，最小值爲 23　，故選 (A)(C)

例題 5

南北生技農場今年生產一種植物共 1 萬公斤，該植物每 200 公斤可提煉 1 公斤的中草藥，每 5 公斤可製成 1 公斤的健康食品。中草藥每公斤可獲利 5000 元，健康食品每公斤可獲利 100 元；根據市場調查每年中草藥最大需求量為 30 公斤，健康食品最大需求量為 1800 公斤。如果南北生技農場決定提煉中草藥 x 公斤，並製成健康食品 y 公斤，設 P 為其可獲利潤。

(1) 試以 x，y 表示 P。

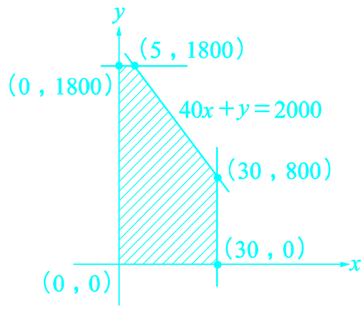
(2) 如果想獲得最大利潤，則 x，y 的值為何？說明理由。　【93.指考乙】

$\boxed{\text{解析}}$：(1) 由題意得 $P = 5000x + 100y$

(2) 因 $\begin{cases} 0\leqq x\leqq 30 \\ 0\leqq y\leqq 1800 \\ 200x+5y\leqq 10000 \end{cases}$，即 $\begin{cases} 0\leqq x\leqq 30 \\ 0\leqq y\leqq 1800 \\ 40x+y\leqq 2000 \end{cases}$ 其圖形如右下，頂點是

（0，1800），（0，0），（30，0），（30，800），

（5，1800），又



(x, y)	$P=5000x+100y$
（0，1800）	180,000
（0，0）	0
（30，0）	150,000
（30，800）	230,000……最大
（5，1800）	205,000

故當 $x=30$，$y=800$ 時，可獲得最大利潤 230,000 元

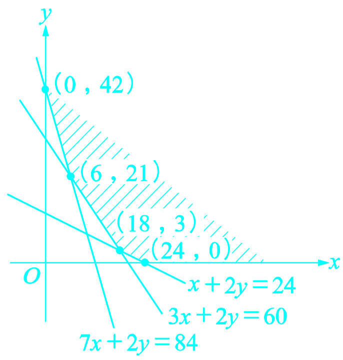
例題 6

為預防禽流感，營養師吩咐雞場主人每天必須從飼料中提供至少 84 單位的營養素 A，至少 72 單位的營養素 B 和至少 60 單位的營養素 C 給他的雞群。這三種營養素可由兩種飼料中獲得，且知第一種飼料每公斤售價 5 元並含有 7 單位的營養素 A，3 單位的營養素 B 與 3 單位的營養素 C；第二種飼料每公斤售價 4 元並含有 2 單位的營養素 A，6 單位的營養素 B 與 2 單位的營養素 C。

(1) 若雞場主人每天使用 x 公斤的第一種飼料與 y 公斤的第二種飼料就能符合營養師吩咐，則除了 $x\geqq 0$，$y\geqq 0$ 兩個條件外，寫下 x，y 必須滿足的不等式組。

(2) 若雞場主人想以最少的飼料成本來達到雞群的營養要求，則 x，y 的值為何？最少的飼料成本又是多少？ 【95.指考乙】

解析：(1) 依題意，整理資料如下：



營養素 / 飼料	A	B	C	售價
第一種飼料（x）	7	3	3	5（元／公斤）
第二種飼料（y）	2	6	2	4（元／公斤）

由以上可知 $\begin{cases} 7x+2y\geqq 84 \\ 3x+6y\geqq 72 \\ 3x+2y\geqq 60 \\ x\geqq 0,\ y\geqq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x+2y\geqq 84 \\ x+2y\geqq 24 \\ 3x+2y\geqq 60 \\ x\geqq 0,\ y\geqq 0 \end{cases}$

⑵ 欲求花費 $5x+4y$ 之最小值

	（0，42）	（6，21）	（18，3）	（24，0）
$5x+4y$	168	114	102 最小	120

當 $x=18$，$y=3$ 時，$5x+4y$ 有最小值 102

故使用第一種飼料 18 公斤，使用第二種飼料 3 公斤可得最少的飼料成本 102 元

例題 7

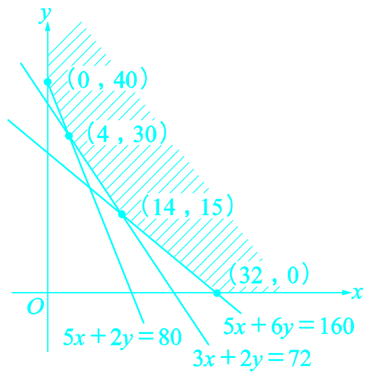
某歌唱訓練班根據以往的經驗得知：每花 10 萬元在報章雜誌上替歌手打廣告可以提升歌手的形象指數 5 點，知名度指數 10 點；反之，若是在電台上，同樣花 10 萬元替歌手打廣告，則可以提升歌手的形象指數 6 點，知名度指數 4 點。根據市場調查發現成為名歌星的形象指數至少 160 點，知名度指數亦至少 160 點，而且綜合指數（形象指數與知名度指數的和）至少 360 點。試問：歌唱訓練班要讓一位新歌手（假設其形象指數與知名度指數皆為 0）成為名歌星至少應該花多少廣告費？這些廣告費報章雜誌與電台應各分配多少，效果最好。（請在坐標平面上畫圖求解）　　【91.指考乙】

$\boxed{\text{解析}}$：設需花費報章雜誌費 $10x$ 萬元，電台費 $10y$ 萬元

$$\text{則}\begin{cases} x\geqq 0，y\geqq 0 \\ 5x+6y\geqq 160 \\ 10x+4y\geqq 160 \\ 15x+10y\geqq 360 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geqq 0，y\geqq 0 \\ 5x+6y\geqq 160 \\ 5x+2y\geqq 80 \\ 3x+2y\geqq 72 \end{cases}$$

欲求目標函數 $f(x，y)=x+y$ 之最小值

不等式組之圖形如右



$(x，y)$	$f(x，y)=x+y$
（32，0）	32
（14，15）	29 →最小值
（4，30）	34
（0，40）	40

∴廣告費應分配報章雜誌 140 萬元，電台 150 萬元，可得最小花費為 290 萬元

例題 8

某公司所生產的產品存放在甲、乙兩倉庫分別有 50 單位，40 單位，現在市場 A，市場 B 分別的需求量是 20 單位，30 單位，右表是各倉庫運輸到各市場的每單位運輸成本。在滿足 A，B 市場的需求下，最節省的運輸成本為________元。

	市場 A	市場 B
倉庫甲	500 元	450 元
倉庫乙	400 元	300 元

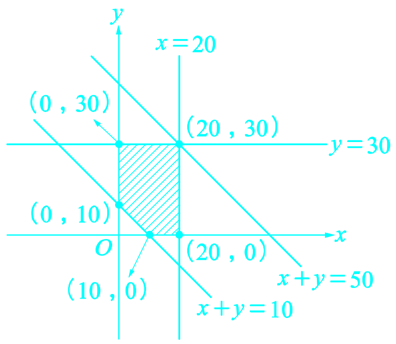
【92.指考乙】

解析：設甲倉庫運送 x 單位至市場 A

運送 y 單位至市場 B

則乙倉庫運送（$20-x$）單位至市場 A

運送（$30-y$）單位至市場 B



$$\begin{cases} x+y\leqq 50 \\ (20-x)+(30-y)\leqq 40 \\ 0\leqq x\leqq 20 \\ 0\leqq y\leqq 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y\leqq 50 \\ x+y\geqq 10 \\ 0\leqq x\leqq 20 \\ 0\leqq y\leqq 30 \end{cases}$$

目標函數 $f(x,y)=500x+450y+400(20-x)+300(30-y)=100x+150y+17000$

由

(x,y)	$(10,0)$	$(20,0)$	$(20,30)$	$(0,30)$	$(0,10)$
$100x+150y+17000$	18000	19000	23500	21500	18500

∴當 $x=10$，$y=0$ 時，最小運輸成本為 18000 元