3-2 條件不等式

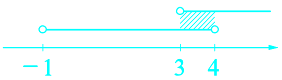
例題 1

聯立不等式 $\begin{cases} x^2-3x-4<0 \\ x^3+x^2-8x-12>0 \end{cases}$ 之解為________。

$\boxed{\text{解析}}$：$x^2-3x-4<0 \Rightarrow (x-4)(x+1)<0 \Rightarrow -1<x<4$……………①

$x^3+x^2-8x-12>0 \Rightarrow (x+2)(x^2-x-6)>0$

$\Rightarrow (x+2)(x-3)(x+2)>0 \Rightarrow (x+2)^2(x-3)>0 \Rightarrow x>3$ …………………②



由①、②知 $3<x<4$

例題 2

不等式 $x^2-2x+|x-1|<1$ 之解為________。

$\boxed{\text{解析}}$：(1) 當 $x\geqq 1$ 時，原式 $\Rightarrow x^2-2x+(x-1)<1$

$\Rightarrow x^2-x-2<0 \Rightarrow (x-2)(x+1)<0$

$\Rightarrow -1<x<2$，又 $x\geqq 1 \Rightarrow 1\leqq x<2$

(2) 當 $x<1$ 時，原式 $\Rightarrow x^2-2x-(x-1)<1$

$\Rightarrow x^2-2x-x+1<1 \Rightarrow x^2-3x<0$

$\Rightarrow x(x-3)<0 \Rightarrow 0<x<3$，又 $x<1 \Rightarrow 0<x<1$

由(1)、(2)知不等式 $x^2-2x+|x-1|<1$ 之解爲 $0<x<2$

例題 3

若對任何實數 x，不等式 $\dfrac{2x^2+ax+2}{x^2-x+1}\leqq 3$ 恆成立，則實數 a 之範圍為________。

$\boxed{\text{解析}}$： x^2-x+1 恆正，$\because D=(-1)^2-4\leqq 0$

故 $\dfrac{2x^2+ax+2}{x^2-x+1}\leqq 3 \Rightarrow 2x^2+ax+2\leqq 3x^2-3x+3$（同乘 x^2-x+1）

$\Rightarrow x^2-(a+3)x+1\geqq 0$

$\because$ 對於任何實數 x 恆成立，$\therefore D=(a+3)^2-4\leqq 0$

$\Rightarrow a^2+6a+5\leqq 0$

$\Rightarrow (a+1)(a+5)\leqq 0$

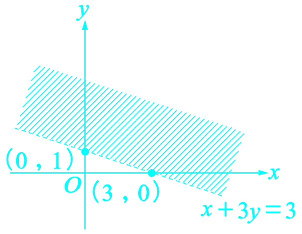
$\Rightarrow -5\leqq a\leqq -1$

例題 4

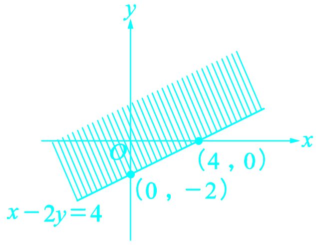
試作下列各不等式之圖形：

(1) $x+3y>3$． (2) $x-2y\leqq 4$． (3) $y<-3$．

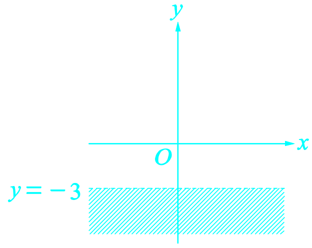
$\boxed{\text{解析}}$：(1)



(2)



(3)

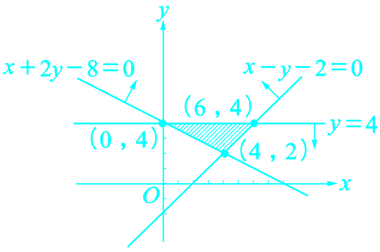


例題 5

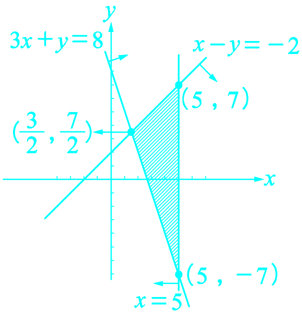
試作下列各聯立不等式的圖形：

(1) $\begin{cases} x-y-2\leqq 0 \\ x+2y-8\geqq 0 \\ y\leqq 4 \end{cases}$． (2) $6-3x\leqq y-2\leqq x\leqq 5$． (3) $(x+y-4)(x-2y+4)\leqq 0$．

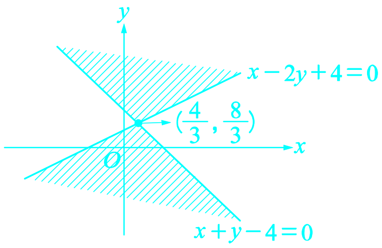
$\boxed{\text{解析}}$：(1)



(2) $6-3x\leqq y-2\leqq x\leqq 5$，即 $\begin{cases} 6-3x\leqq y-2 \\ y-2\leqq x \\ x\leqq 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+y\geqq 8 \\ x-y\geqq -2 \\ x\leqq 5 \end{cases}$



(3) 直線$x+y-4=0$與$x-2y+4=0$之異號區



例題 6

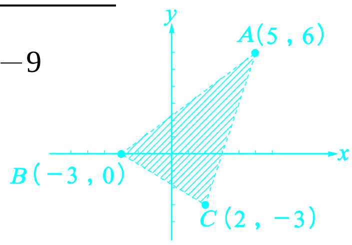
設 $A(5，6)$，$B(-3，0)$，$C(2，-3)$ 為坐標平面上的三個點，

(1) 試以聯立不等式表示$\triangle ABC$ 的內部（不含邊界）．

(2) 若點 $P(k，2k-1)$ 為$\triangle ABC$ 內部任一點，則實數 k 的範圍為________．

$\boxed{\text{解析}}$：(1) $\because m_{\overleftrightarrow{AB}}=\dfrac{6-0}{5-(-3)}=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}$，$\overleftrightarrow{AB}$ 之方程式爲 $3x-4y=-9$

$\because m_{\overleftrightarrow{BC}}=\dfrac{-3-0}{2-(-3)}=\dfrac{-3}{5}$，$\overleftrightarrow{BC}$ 之方程式爲 $3x+5y=-9$



$\because m_{\overleftrightarrow{AC}}=\dfrac{6-(-3)}{5-2}=\dfrac{9}{3}=3$，$\overleftrightarrow{AC}$ 之方程式為 $3x-y=9$

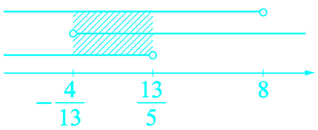
故以 $\begin{cases}3x-4y>-9\\3x+5y>-9\\3x-y<9\end{cases}$ 表△ABC 之內部

(2) $\because P(k,2k-1)$ 為△ABC 內部任一點，

$\therefore 3k-4(2k-1)>-9 \Rightarrow -5k>-13$，即 $k<\dfrac{13}{5}$……………①

$3k+5(2k-1)>-9 \Rightarrow 13k>-4$，即 $k>-\dfrac{4}{13}$ ……………②

$3k-(2k-1)<9$，即 $k<8$……………③

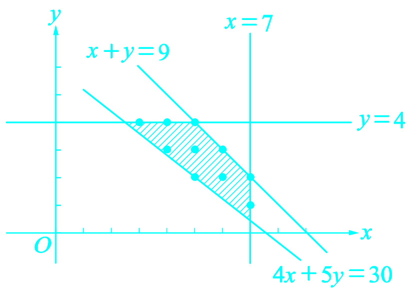


由①、②、③知 k 之範圍為 $-\dfrac{4}{13}<k<\dfrac{13}{5}$

例題 7

在二元一次聯立不等式 $\begin{cases}0\leqq x\leqq 7\\0\leqq y\leqq 4\\0\leqq x+y\leqq 9\\4x+5y\geqq 30\end{cases}$ 的可行解區域中，有________個格子點。

解析：$\begin{cases}0\leqq x\leqq 7\\0\leqq y\leqq 4\\0\leqq x+y\leqq 9\\4x+5y\geqq 30\end{cases}$，$x$，$y\in\mathbb{Z}$



以上不等式組作圖如右

故 (x,y) 的非負整數解為

y	1	2	3	4
x	7	5，6，7	4，5，6	3，4，5

$\Rightarrow$ (x,y) 共有 $1+3+3+3=10$ 組解，故有 10 個格子點

例題 8

設函數 $f(x)=4-\sqrt{x^2-2x+5}$，則當 $x=$________時，$f(x)$ 有最大值為________。

解析：$f(x)=4-\sqrt{x^2-2x+5}=4-\sqrt{(x-1)^2+4}$

當 $x=1$ 時，$f(x)$ 有最大值為 $4-\sqrt{0^2+4}=4-2=2$

例題 9

設 $f(x)=(x^2-2x+3)(x^2-2x+4)+x^2-2x+5$，則當 $x=$__時，$f(x)$ 有最小值為__。

$\boxed{\text{解析}}$：設大變數 $t=x^2-2x=(x-1)^2-1\geqq-1$

$\therefore g(t)=f(x)$
$=(x^2-2x+3)(x^2-2x+4)+x^2-2x+5$
$=(t+3)(t+4)+t+5$
$=t^2+7t+12+t+5$
$=t^2+8t+17$
$=(t+4)^2+1$，又 $t\geqq-1$

⇨ 當 $t=-1$，$g(t)=f(x)$ 有最小值爲 10，此時 $x^2-2x=-1$ ⇨ $x=1$

故當 $x=1$ 時，$f(x)$ 有最小值爲 10

例題 10

設 $x^2+4y^2=4$，則 $2x+4y^2+5$ 之最大值為________，最小值為________。

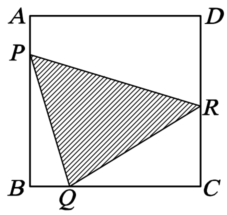
$\boxed{\text{解析}}$：$\because x^2+4y^2=4$ ⇨ $4y^2=4-x^2\geqq0$ ⇨ $x^2\leqq4$ ⇨ $-2\leqq x\leqq2$

$2x+4y^2+5=2x+(4-x^2)+5$
$=-x^2+2x+9$
$=-(x-1)^2+10$，又 $-2\leqq x\leqq2$

故當 $x=1$ 時，$2x+4y^2+5$ 有最大值爲 10
當 $x=-2$ 時，$2x+4y^2+5$ 有最小值爲 1

例題 11

如右圖，正方形 $ABCD$ 的邊長為 12 公分，動點 P，Q，R 分別在 $\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{CD}$ 上，且 $\overline{AP}=\overline{BQ}=\dfrac{1}{2}\overline{CR}$，設 $\overline{AP}=x$，則：

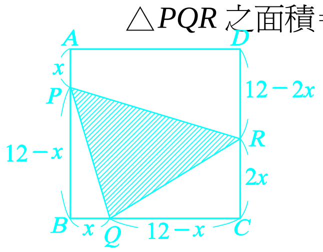


(1) $\triangle PQR$ 之面積為________。(以 x 表示)

(2) 當 $x=$________公分時，$\triangle PQR$ 有最小面積為________平方公分。

$\boxed{\text{解析}}$：(1) 由右圖知

$\triangle PQR$ 之面積＝正方形面積－$\triangle BPQ$ 面積－$\triangle CQR$ 面積－梯形 $APRD$ 面積



$=12\times12-\dfrac{1}{2}\times x\times(12-x)-\dfrac{1}{2}\times2x\times(12-x)-\dfrac{1}{2}(x+12-2x)\times12$

$=144-6x+\dfrac{1}{2}x^2-12x+x^2-72+6x=\dfrac{3}{2}x^2-12x+72$

(2) 由(1)知△$PQR=\dfrac{3}{2}x^2-12x+72=\dfrac{3}{2}(x^2-8x+16)+48=\dfrac{3}{2}(x-4)^2+48$

故當 $x=4$ 公分時，△PQR 面積有最小值爲 48 平方公分

例題 12

拋物線Γ：$y^2=9x$ 上一點與直線 L：$3x-4y+24=0$ 距離最短之坐標為________，又最短距離為________.

$\boxed{\text{解析}}$：設 $P(t^2，3t)$ 爲拋物線 $y^2=9x$ 上一點

則 P 點到直線 L 之距離爲 $\dfrac{|3t^2-12t+24|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{|3(t-2)^2+12|}{5}$

⇨ 當 $t=2$ 時，距離有最小值 $\dfrac{12}{5}$

故當 $P(4，6)$ 時，有最短距離爲 $\dfrac{12}{5}$