3-1 絕對不等式

例題 1

設 a，b，$c\in\mathbb{R}$，試用柯西不等式證明：$\dfrac{a^4+b^4+c^4}{3}\geqq(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3})^2$，且只有在 $a^2=b^2=c^2$ 時，上式等號才成立。

解析：$\because[(a^2)^2+(b^2)^2+(c^2)^2](1^2+1^2+1^2)\geqq(a^2+b^2+c^2)^2$

⇨ $3(a^4+b^4+c^4)\geqq(a^2+b^2+c^2)^2$

⇨ $\dfrac{a^4+b^4+c^4}{3}\geqq(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3})^2$

等號在 $\dfrac{a^2}{1}=\dfrac{b^2}{1}=\dfrac{c^2}{1}$ 時成立，亦即等號在 $a^2=b^2=c^2$ 時成立

例題 2

設 x，$y\in\mathbb{R}$，若 $9x^2+4y^2=45$，則：

(1) 當數對 $(x,y)=$________時，$3x-4y$ 有最大值為________。

(2) 當數對 $(x,y)=$________時，$3x-4y$ 有最小值為________。

解析：$[(3x)^2+(2y)^2][1^2+(-2)^2]\geqq(3x-4y)^2$

⇨ $45\times5\geqq(3x-4y)^2$

⇨ $-15\leqq3x-4y\leqq15$

(1) 當 $\dfrac{3x}{1}=\dfrac{2y}{-2}$ 且 $3x-4y=15$

亦即數對 $(x,y)=(1,-3)$ 時，$3x-4y$ 有最大值爲 15

(2) 當 $\dfrac{3x}{1}=\dfrac{2y}{-2}$ 且 $3x-4y=-15$

亦即數對 $(x,y)=(-1,3)$ 時，$3x-4y$ 有最小值爲 -15

例題 3

設 x，y，$z\in\mathbb{R}$，若 $4(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=1$，則 $2x-y+2z$ 之最大值為____，最小值為______。

解析：$[(2x-2)^2+(y+2)^2+(z-3)^2][1^2+(-1)^2+2^2]\geqq(2x-2-y-2+2z-6)^2$

⇨ $1\times6\geqq(2x-y+2z-10)^2$

⇨ $-\sqrt{6}\leqq 2x-y+2z-10\leqq\sqrt{6}$

⇨ $10-\sqrt{6}\leqq 2x-y+2z\leqq 10+\sqrt{6}$

例題 4

設 x，y，$z\in\mathbb{R}$，若 $x+y-2z=4$，則當序組（x，y，z）＝________時，$x^2+y^2+z^2-2x+4y+3$ 有最小值為________。

$\boxed{\text{解析}}$：$x^2+y^2+z^2-2x+4y+3=(x-1)^2+(y+2)^2+z^2-2$

$[(x-1)^2+(y+2)^2+z^2][1^2+1^2+(-2)^2]\geqq(x-1+y+2-2z)^2$

⇨ $[(x-1)^2+(y+2)^2+z^2]\times 6\geqq(4-1+2)^2$

⇨ $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2\geqq\dfrac{25}{6}$ ⇨ $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2-2\geqq\dfrac{13}{6}$

等號在 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{-2}=t$ 且 $x+y-2z=4$ 時成立

⇨ $x=t+1$，$y=t-2$，$z=-2t$ 代入 $x+y-2z=4$ 中

⇨ $(t+1)+(t-2)-2(-2t)=4$ ⇨ $6t=5$ ⇨ $t=\dfrac{5}{6}$

⇨ $x=\dfrac{11}{6}$，$y=-\dfrac{7}{6}$，$z=-\dfrac{5}{3}$

故當序組（x，y，z）＝$\left(\dfrac{11}{6}，-\dfrac{7}{6}，-\dfrac{5}{3}\right)$時

$x^2+y^2+z^2-2x+4y+3$ 有最小値爲 $\dfrac{13}{6}$

例題 5

設 x，y，$z\in\mathbb{R}$，且 $x^2+y^2+z^2\neq 0$，則 $\dfrac{2x-y+3z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 之最大值為__，最小值為__。

$\boxed{\text{解析}}$：$(x^2+y^2+z^2)[2^2+(-1)^2+3^2]\geqq(2x-y+3z)^2$

⇨ $(x^2+y^2+z^2)\times 14\geqq(2x-y+3z)^2$

⇨ $\dfrac{(2x-y+3z)^2}{x^2+y^2+z^2}\leqq 14$

⇨ $\dfrac{|2x-y+3z|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\leqq\sqrt{14}$

⇨ $-\sqrt{14}\leqq\dfrac{2x-y+3z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\leqq\sqrt{14}$

故得最大值爲 $\sqrt{14}$，最小值爲 $-\sqrt{14}$

例題 6

設 x，y，$z\in\mathbb{R}$ 且 $x^2+y^2+z^2=16$。若 $x+y+kz$ 之最大值為 $8\sqrt{3}$，則 $k=$________。

$\boxed{\text{解析}}$：$\because (x^2+y^2+z^2)(1^2+1^2+k^2) \geqq (x+y+kz)^2$

$\Rightarrow 16\times(k^2+2) \geqq (x+y+kz)^2$

$\Rightarrow -4\sqrt{k^2+2} \leqq x+y+kz \leqq 4\sqrt{k^2+2}$

又 $x+y+kz$ 之最大值爲 $4\sqrt{k^2+2}=8\sqrt{3}$

$\Rightarrow \sqrt{k^2+2}=2\sqrt{3}=\sqrt{12} \Rightarrow k^2+2=12 \Rightarrow k=\pm\sqrt{10}$

例題 7

設 a，b，c 為正數，且 $a+2b+3c=8$。試利用算幾不等式證明：$ab^2c\leqq\dfrac{16}{3}$，且只有在 $a=b=3c=2$ 時，上式等號才成立。

$\boxed{\text{解析}}$：由算幾不等式知 $\dfrac{a+b+b+3c}{4}\geqq\sqrt[4]{a\cdot b\cdot b\cdot 3c}$

$\Rightarrow \dfrac{8}{4}\geqq\sqrt[4]{3ab^2c} \Rightarrow 3ab^2c\leqq 16 \Rightarrow ab^2c\leqq\dfrac{16}{3}$

等號在 $a=b=3c=t$ 且 $a+2b+3c=8$ 時成立

解之得 $a=2$，$b=2$，$c=\dfrac{2}{3}$，故在 $a=b=3c=2$ 時，等號成立

例題 8

設 x，y 均為正數，且 $x+2y=12$，則：

(1) 當數對 $(x, y)=$________時，xy 有最大值為________。

(2) 當數對 $(x, y)=$________時，xy^2 有最大值為________。

$\boxed{\text{解析}}$：(1) $\dfrac{x+2y}{2}\geqq\sqrt{2xy} \Rightarrow \sqrt{2xy}\leqq 6 \Rightarrow 2xy\leqq 36 \Rightarrow xy\leqq 18$

等號在 $x=2y=t$ 且 $x+2y=12$ 時成立，解之得 $x=6$，$y=3$

故當數對 $(x, y)=(6, 3)$ 時，xy 有最大值爲 18

(2) $\dfrac{x+y+y}{3}\geqq\sqrt[3]{xy^2} \Rightarrow \sqrt[3]{xy^2}\leqq 4 \Rightarrow xy^2\leqq 64$

等號在 $x=y=t$ 且 $x+2y=12$ 時成立，解之得 $x=4$，$y=4$

故當數對 $(x, y)=(4, 4)$ 時，xy^2 有最大值爲 64

例題 9

設 x，y 均為正數，且 $xy^2=54$，則當數對（x，y）＝____時，$2x+y$ 有最小值為____。

解析：$\dfrac{2x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}y}{3} \geqq \sqrt[3]{(2x)\times(\frac{1}{2}y)\times(\frac{1}{2}y)}$

⇨ $\dfrac{2x+y}{3} \geqq \sqrt[3]{\frac{1}{2}xy^2} \geqq \sqrt[3]{\frac{1}{2}\times 54}=3$

⇨ $2x+y \geqq 9$

等號在 $2x=\frac{1}{2}y=t$ 且 $xy^2=54$ 時成立，解之得 $x=\frac{3}{2}$，$y=6$

故當數對（x，y）＝（$\frac{3}{2}$，6）時，$2x+y$ 有最小値爲 9

例題 10

設 x，y，z 均為正數，且 $x+2y+3z=12$，則當序組（x，y，z）＝________時，xy^2z 有最大值為________。

解析：$\dfrac{x+y+y+3z}{4} \geqq \sqrt[4]{xy^2(3z)}=\sqrt[4]{3xy^2z}$

⇨ $\dfrac{12}{4} \geqq \sqrt[4]{3xy^2z}$ ⇨ $3xy^2z \leqq 81$ ⇨ $xy^2z \leqq 27$

等號在 $x=y=3z=t$ 且 $x+2y+3z=12$ 時成立，解之得 $x=3$，$y=3$，$z=1$

故當序組（x，y，z）＝（3，3，1）時，xy^2z 有最大値爲 27

例題 11

若 a 為正數，則當 $a=$________時，$a+2+\dfrac{36}{a+4}$ 有最小值為________。

解析：$\because a>0 \quad \therefore a+4>0$

⇨ $\dfrac{(a+4)+\frac{36}{a+4}}{2} \geqq \sqrt{(a+4)\times\frac{36}{a+4}}=\sqrt{36}=6$

⇨ $a+4+\dfrac{36}{a+4} \geqq 12$ ⇨ $a+2+\dfrac{36}{a+4} \geqq 10$

等號在 $a+4=\dfrac{36}{a+4}$ 時成立⇨ $(a+4)^2=36$ ⇨ $a+4=6$ 或 -6 ⇨ $a=2$ 或 -10（不合）

故當 $a=2$ 時，$a+2+\dfrac{36}{a+4}$ 有最小値爲 10

例題 12

已知一長方體的體積為 64 立方公尺，則其表面積之最小值為________平方公尺．

解析：設長爲 x 公尺，寬爲 y 公尺，高爲 z 公尺，則 $xyz=64$

又 $\dfrac{xy+yz+zx}{3}\geqq\sqrt[3]{(xy)(yz)(zx)}=\sqrt[3]{(xyz)^2}=\sqrt[3]{64^2}=16$

⇨ $xy+yz+zx\geqq 48$

⇨ $2(xy+yz+zx)\geqq 96$

等號在 $xy=yz=zx=t$ 且 $xyz=64$ 時成立，解之得 $x=y=z=4$

故當長、寬、高均爲 4 公尺時，其表面積有最小值爲 96 平方公尺

3-2 條件不等式

重點整理

1 二次不等式與高次不等式

1. 二次函數的恆正與恆負

$f(x)=ax^2+bx+c$，a，b，$c\in\mathbb{R}$，$a\neq 0$，令 $D=b^2-4ac$，

(1) ① 若 $f(x)>0$ 恆成立（恆在 x 軸上方）$\Leftrightarrow a>0$，$D<0$.

② 若 $f(x)\geqq 0$ 恆成立 $\Leftrightarrow a>0$，$D\leqq 0$.

(2) ① 若 $f(x)<0$ 恆成立（恆在 x 軸下方）$\Leftrightarrow a<0$，$D<0$.

② 若 $f(x)\leqq 0$ 恆成立 $\Leftrightarrow a<0$，$D\leqq 0$.

2. 一元高次不等式之解法：

(1) 先因式分解爲一次因式或二次因式的乘積.

(2) 再分別討論各因式之正、負情形即得其解.

例題 1

聯立不等式 $\begin{cases} x^2-3x-4<0 \\ x^3+x^2-8x-12>0 \end{cases}$ 之解為________.

■：$x^2-3x-4<0 \Rightarrow (x-4)(x+1)<0$

$\Rightarrow -1<x<4$……………①

$x^3+x^2-8x-12>0 \Rightarrow (x+2)(x^2-x-6)>0$

$\Rightarrow (x+2)(x-3)(x+2)>0 \Rightarrow (x+2)^2(x-3)>0$

$\Rightarrow x>3$……………………②

由①、②知 $3<x<4$

例題 2

不等式 $x^2-2x+|x-1|<1$ 之解為________.

■：(1) 當 $x\geqq 1$ 時，原式 $\Rightarrow x^2-2x+(x-1)<1$

$\Rightarrow x^2-x-2<0 \Rightarrow (x-2)(x+1)<0$

$\Rightarrow -1<x<2$，又 $x\geqq 1 \Rightarrow 1\leqq x<2$

(2) 當 $x<1$ 時，原式 $\Rightarrow x^2-2x-(x-1)<1$

$\Rightarrow x^2-2x-x+1<1 \Rightarrow x^2-3x<0$

$\Rightarrow x(x-3)<0 \Rightarrow 0<x<3$，又 $x<1 \Rightarrow 0<x<1$

由(1)、(2)知不等式 $x^2-2x+|x-1|<1$ 之解爲 $0<x<2$

例題 3

若對任何實數 x，不等式 $\dfrac{2x^2+ax+2}{x^2-x+1} \leqq 3$ 恆成立，則實數 a 之範圍為________ .

■： $\because x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ 恆正

故 $\dfrac{2x^2+ax+2}{x^2-x+1} \leqq 3$

⇨ $2x^2+ax+2 \leqq 3x^2-3x+3$（同乘 x^2-x+1）

⇨ $x^2-(a+3)x+1 \geqq 0$

$\because$ 對於任何實數 x 恆成立

$\therefore D=(a+3)^2-4 \leqq 0$

⇨ $a^2+6a+5 \leqq 0$

⇨ $(a+1)(a+5) \leqq 0$

⇨ $-5 \leqq a \leqq -1$

重點整理

2　二元一次不等式之幾何意義

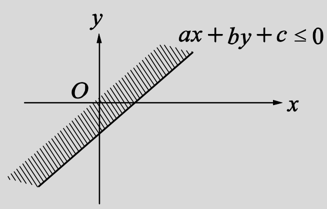
設 L：$ax+by+c=0$ 表平面上一直線，而 $a>0$，則：

(1) $ax+by+c<0$，表 L 左方但不包含 L 之半平面 .

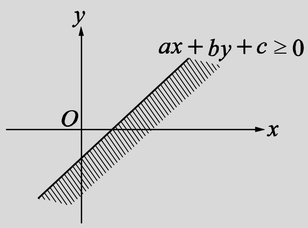
(2) $ax+by+c>0$，表 L 右方但不包含 L 之半平面 .

(3) $ax+by+c \leqq 0$，表 L 左半平面與 L 之聯集，如圖㈠ .

(4) $ax+by+c \geqq 0$，表 L 右半平面與 L 之聯集，如圖㈡ .



圖㈠



圖㈡

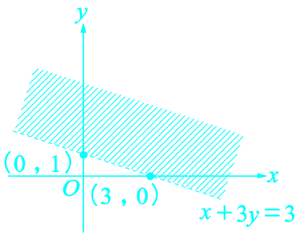
註：若等號不成立，則以虛線表示 .

例題 4

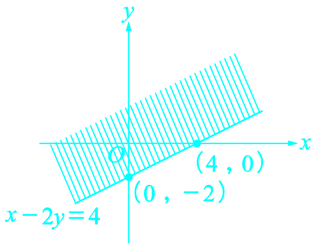
試作下列各不等式之圖形：

(1) $x+3y>3$． (2) $x-2y\leqq 4$． (3) $y<-3$．

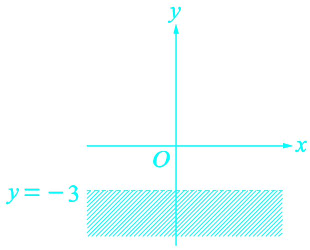
[redacted]：(1)



(2)



(3)

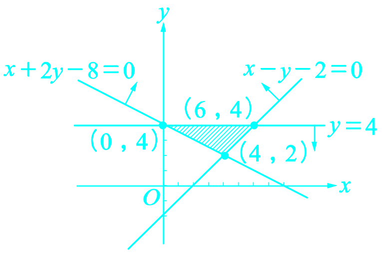


例題 5

試作下列各聯立不等式的圖形：

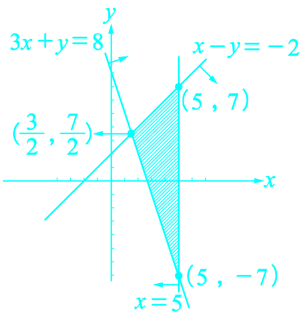
(1) $\begin{cases} x-y-2\leqq 0 \\ x+2y-8\geqq 0 \\ y\leqq 4 \end{cases}$． (2) $6-3x\leqq y-2\leqq x\leqq 5$． (3) $(x+y-4)(x-2y+4)\leqq 0$．

[redacted]：(1)

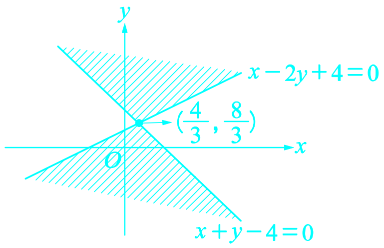


(2) $6-3x\leqq y-2\leqq x\leqq 5$

即 $\begin{cases} 6-3x\leqq y-2 \\ y-2\leqq x \\ x\leqq 5 \end{cases}$ ⇨ $\begin{cases} 3x+y\geqq 8 \\ x-y\geqq -2 \\ x\leqq 5 \end{cases}$



(3)



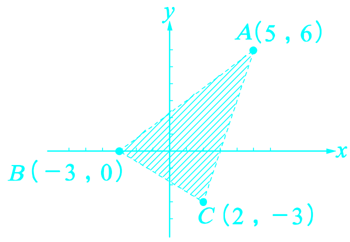
例題 6

設 $A(5,6)$，$B(-3,0)$，$C(2,-3)$ 為坐標平面上的三個點，

(1) 試以聯立不等式表示$\triangle ABC$ 的內部（不含邊界）。

(2) 若點 $P(k,2k-1)$ 為$\triangle ABC$ 內部任一點，則實數 k 的範圍為________。

■：(1) $\because m_{\overleftrightarrow{AB}}=\dfrac{6-0}{5-(-3)}=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}$



$\therefore \overleftrightarrow{AB}$ 之方程式為 $3x-4y=-9$

$\because m_{\overleftrightarrow{BC}}=\dfrac{-3-0}{2-(-3)}=\dfrac{-3}{5}$

$\therefore \overleftrightarrow{BC}$ 之方程式為 $3x+5y=-9$

$\because m_{\overleftrightarrow{AC}}=\dfrac{6-(-3)}{5-2}=\dfrac{9}{3}=3$

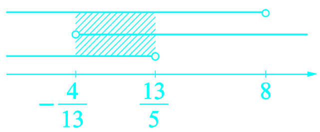
$\therefore \overleftrightarrow{AC}$ 之方程式為 $3x-y=9$

故以 $\begin{cases}3x-4y>-9\\3x+5y>-9\\3x-y<9\end{cases}$ 表$\triangle ABC$ 之內部

(2) $\because P(k,2k-1)$ 為$\triangle ABC$ 內部任一點

$\therefore 3k-4(2k-1)>-9$

⇨ $-5k>-13$，即 $k<\dfrac{13}{5}$……………①



$3k+5(2k-1)>-9$

⇨ $13k>-4$，即 $k>-\dfrac{4}{13}$ ……………②

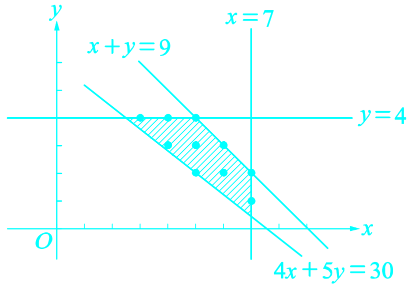
$3k-(2k-1)<9$，即 $k<8$……………③

由①、②、③知 k 之範圍為 $-\dfrac{4}{13}<k<\dfrac{13}{5}$

例題 7

在二元一次聯立不等式 $\begin{cases} 0\leqq x\leqq 7 \\ 0\leqq y\leqq 4 \\ 0\leqq x+y\leqq 9 \\ 4x+5y\geqq 30 \end{cases}$ 的可行解區域中，有________個格子點。

■：$\begin{cases} 0\leqq x\leqq 7 \\ 0\leqq y\leqq 4 \\ 0\leqq x+y\leqq 9 \\ 4x+5y\geqq 30 \end{cases}$，$x，y\in\mathbb{Z}$



以上不等式組作圖如右

故（$x，y$）的非負整數解爲

y	1	2	3	4
x	7	5，6，7	4，5，6	3，4，5

⇨（$x，y$）共有 $1+3+3+3=10$ 組解

故有 10 個格子點

重點整理

3 二次函數的極值

設 $a，b，c$ 爲實數，$a\neq 0$，對給定的二次函數

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

(1) 若 $a>0$ 時，則當 $x=-\dfrac{b}{2a}$，$f(x)$ 有最小值爲 $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$。

(2) 若 $a<0$ 時，則當 $x=-\dfrac{b}{2a}$，$f(x)$ 有最大值爲 $-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$。

例題 8

設函數 $f(x)=4-\sqrt{x^2-2x+5}$，則當 $x=$________時，$f(x)$ 有最大值為________。

■：$f(x)=4-\sqrt{x^2-2x+5}$

$=4-\sqrt{(x-1)^2+4}$

當 $x=1$ 時，$f(x)$ 有最大值爲 $4-\sqrt{0^2+4}=4-2=2$

例題 9

設 $f(x)=(x^2-2x+3)(x^2-2x+4)+x^2-2x+5$，則當 $x=$________時，$f(x)$ 有最小值為________。

■：令 $t=x^2-2x=(x-1)^2-1\geqq -1$

$\therefore g(t)=f(x)$

$=(x^2-2x+3)(x^2-2x+4)+x^2-2x+5$

$=(t+3)(t+4)+t+5$

$=t^2+7t+12+t+5$

$=t^2+8t+17$

$=(t+4)^2+1$，又 $t\geqq -1$

⇨ 當 $t=-1$，$g(t)=f(x)$ 有最小值爲 10，此時 $x^2-2x=-1$ ⇨ $x=1$

故當 $x=1$ 時，$f(x)$ 有最小值爲 10

例題 10

設 $x^2+4y^2=4$，則 $2x+4y^2+5$ 之最大值為________，最小值為________。

■：$\because x^2+4y^2=4$

⇨ $4y^2=4-x^2\geqq 0$

⇨ $x^2\leqq 4$

⇨ $-2\leqq x\leqq 2$

$2x+4y^2+5=2x+(4-x^2)+5$

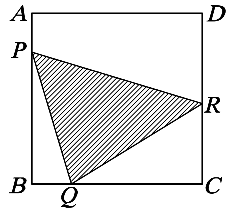
$=-x^2+2x+9$

$=-(x-1)^2+10$，又 $-2\leqq x\leqq 2$

故當 $x=1$ 時，$2x+4y^2+5$ 有最大值爲 10

當 $x=-2$ 時，$2x+4y^2+5$ 有最小值爲 1

例題 11

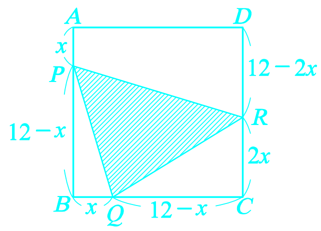


如右圖，正方形 $ABCD$ 的邊長為 12 公分，動點 P，Q，R 分別在 $\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{CD}$ 上，且 $\overline{AP}=\overline{BQ}=\frac{1}{2}\overline{CR}$，設 $\overline{AP}=x$，則：

(1) $\triangle PQR$ 之面積為________。（以 x 表示）

(2) 當 $x=$________公分時，$\triangle PQR$ 有最小面積為________平方公分。

■：(1) 由右圖知



$\triangle PQR$ 之面積

＝正方形面積－$\triangle BPQ$ 面積－$\triangle CQR$ 面積

　－梯形 $APRD$ 面積

$=12\times12-\frac{1}{2}\times x\times(12-x)-\frac{1}{2}\times2x\times(12-x)-\frac{1}{2}(x+12-2x)\times12$

$=144-6x+\frac{1}{2}x^2-12x+x^2-72+6x$

$=\frac{3}{2}x^2-12x+72$

(2) 由(1)知$\triangle PQR=\frac{3}{2}x^2-12x+72=\frac{3}{2}(x^2-8x+16)+48=\frac{3}{2}(x-4)^2+48$

故當 $x=4$ 公分時，$\triangle PQR$ 面積有最小值爲 48 平方公分

例題 12

抛物線Γ：$y^2=9x$ 上一點與直線 L：$3x-4y+24=0$ 距離最短之坐標為________，又最短距離為________。

■：設 $P(t^2，3t)$ 爲抛物線 $y^2=9x$ 上一點

則 P 點到直線 L 之距離爲 $\frac{|3t^2-12t+24|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|3(t-2)^2+12|}{5}$

⇨ 當 $t=2$ 時，距離有最小值 $\frac{12}{5}$

故當 $P(4，6)$ 時，有最短距離爲 $\frac{12}{5}$

3-3 線性規劃

重點整理

1 線性規劃

1. 線性規劃：若一個應用問題涉及兩個變數 x，y，且 x，y 受到幾個二元一次不等式的限制，又 P 是一個 x 與 y 的一次函數，則求 P 的最大值或最小值的問題就稱爲線性規劃。其中 x，y 稱爲決策變數，聯立不等式組稱爲限制條件，滿足聯立不等式組的圖形稱爲可行解區域，而函數 P 稱爲目標函數。

2. 線性規劃問題的解題步驟

(1) 依題意，將所予條件列出 x，y 之不等式或不等式組。

(2) 將不等式組以圖示之：

① 若求最大值，則圖形爲封閉的凸多邊形區域。

② 若求最小值，則圖形經常是開放區域。

(3) 令欲求之式爲 k：

① 若求最大值，則必存在於凸多邊形的頂點。

② 若求最小值，則考慮其幾何意義。

例題 1

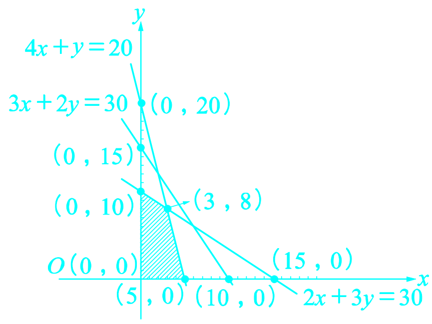
試在聯立不等式 $\begin{cases} 3x+2y\leqq 30 \\ 2x+3y\leqq 30 \\ 4x+y\leqq 20 \\ x\geqq 0，y\geqq 0 \end{cases}$ 的條件下，求 $4x+12y$ 之最大值為________。

■：

由

$(x，y)$	$4x+12y$
$(0，0)$	0
$(5，0)$	20
$(3，8)$	108
$(0，10)$	120……最大

故 $4x+12y$ 之最大值爲 120



例題 2

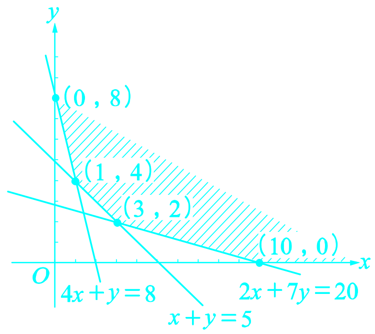
試在聯立不等式 $\begin{cases} 4x+y\geqq 8 \\ x+y\geqq 5 \\ 2x+7y\geqq 20 \\ x\geqq 0 \\ y\geqq 0 \end{cases}$ 的條件下，求 $x+2y$ 之最小值為________。

■：不等式之圖形如右所示

由

(x, y)	$(0, 8)$	$(1, 4)$	$(3, 2)$	$(10, 0)$
$x+2y$	16	9	7	10

知 $x+2y$ 之最小值爲 7



例題 3

若 (x, y) 為聯立不等式 $\begin{cases} 3x+y\geqq 9 \\ x-2y\leqq -4 \\ x+5y\leqq 31 \end{cases}$ 所表示圖形上的任一點，且 $P=kx+y$ 在 $(1, 6)$ 有極小值時，則 k 的範圍為________。

■：

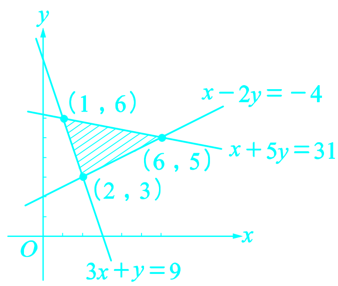
聯立不等式 $\begin{cases} 3x+y\geqq 9 \\ x-2y\leqq -4 \\ x+5y\leqq 31 \end{cases}$ 之圖形如右圖三角形的區域

其頂點爲 $(1, 6)$，$(2, 3)$，$(6, 5)$

(x, y)	$(1, 6)$	$(2, 3)$	$(6, 5)$
$P=kx+y$	$k+6$	$2k+3$	$6k+5$

$\because P=kx+y$ 在 $(1, 6)$ 有極小值

$\therefore \begin{cases} k+6\leqq 2k+3 \\ k+6\leqq 6k+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k\geqq 3 \\ k\geqq \dfrac{1}{5} \end{cases}$，故 $k\geqq 3$



例題 4

在一個牽涉到兩個未知量 x，y 的線性規劃作業中，有三個限制條件．坐標平面上符合這三個限制條件的區域是一個三角形區域．假設目標函數 $ax+by$（a，b 是常數）在此三角形的一個頂點（19，12）上取得最大值 31，而在另一個頂點（13，10）取得最小值 23．現因業務需要，加入第四個限制條件，結果符合所有限制條件的區域變成一個四邊形區域，頂點少了（19，12），新增了（17，13）和（16，11）．在這四個限制條件下，請選出正確的選項．

(A) $ax+by$ 的最大值發生在（17，13）　(B) $ax+by$ 的最小值發生在（16，11）

(C) $ax+by$ 的最大值是 30　(D) $ax+by$ 的最小值是 27．　【92.指考甲】

■：設目標函數 $f(x, y)=ax+by$

則 $f(19, 12)=19a+12b=31$

$f(13, 10)=13a+10b=23$

$\therefore a=b=1$，亦即 $f(x, y)=x+y$

又 $f(17, 13)=17+13=30$

$f(16, 11)=16+11=27$

$\therefore$後來的最大値爲 30，最小値爲 23

故選 (A)(C)

重點整理

2　應用問題

有關線性規劃的應用問題的解法可按下列步驟進行：

⑴ 列表．

⑵ 求出不等式組與目標函數．

⑶ 作出可行解區域，求出頂點坐標．

⑷ 將頂點代入目標函數．

例題 5

南北生技農場今年生產一種植物共 1 萬公斤，該植物每 200 公斤可提煉 1 公斤的中草藥，每 5 公斤可製成 1 公斤的健康食品。中草藥每公斤可獲利 5000 元，健康食品每公斤可獲利 100 元；根據市場調查每年中草藥最大需求量為 30 公斤，健康食品最大需求量為 1800 公斤。如果南北生技農場決定提煉中草藥 x 公斤，並製成健康食品 y 公斤，設 P 為其可獲利潤。

(1) 試以 x，y 表示 P。

(2) 如果想獲得最大利潤，則 x，y 的值為何？說明理由。【93.指考乙】

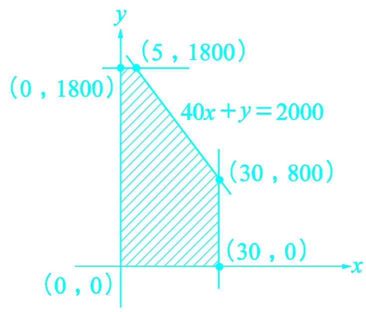
■：(1) 由題意得 $P=5000x+100y$

(2) 因 $\begin{cases} 0\leqq x\leqq 30 \\ 0\leqq y\leqq 1800 \\ 200x+5y\leqq 10000 \end{cases}$，即 $\begin{cases} 0\leqq x\leqq 30 \\ 0\leqq y\leqq 1800 \\ 40x+y\leqq 2000 \end{cases}$

其圖形如右，頂點是

（0，1800），（0，0），（30，0），（30，800），

（5，1800），又



(x, y)	$P=5000x+100y$
（0，1800）	180,000
（0，0）	0
（30，0）	150,000
（30，800）	230,000……最大
（5，1800）	205,000

故當 $x=30$，$y=800$ 時，可獲得最大利潤 230,000 元

例題 6

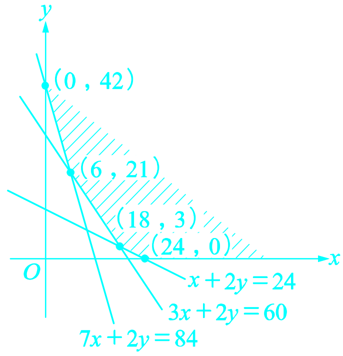
為預防禽流感，營養師吩咐雞場主人每天必須從飼料中提供至少 84 單位的營養素 A，至少 72 單位的營養素 B 和至少 60 單位的營養素 C 給他的雞群。這三種營養素可由兩種飼料中獲得，且知第一種飼料每公斤售價 5 元並含有 7 單位的營養素 A，3 單位的營養素 B 與 3 單位的營養素 C；第二種飼料每公斤售價 4 元並含有 2 單位的營養素 A，6 單位的營養素 B 與 2 單位的營養素 C。

(1) 若雞場主人每天使用 x 公斤的第一種飼料與 y 公斤的第二種飼料就能符合營養師吩咐，則除了 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ 兩個條件外，寫下 x，y 必須滿足的不等式組。

(2) 若雞場主人想以最少的飼料成本來達到雞群的營養要求，則 x，y 的值為何？最少的飼料成本又是多少？【95.指考乙】

■：(1) 依題意，整理資料如下：

營養素 ／ 飼料	A	B	C	售價
第一種飼料（x）	7	3	3	5（元／公斤）
第二種飼料（y）	2	6	2	4（元／公斤）



由以上可知 $\begin{cases} 7x+2y \geqq 84 \\ 3x+6y \geqq 72 \\ 3x+2y \geqq 60 \\ x \geqq 0，y \geqq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x+2y \geqq 84 \\ x+2y \geqq 24 \\ 3x+2y \geqq 60 \\ x \geqq 0，y \geqq 0 \end{cases}$

(2) 欲求花費 $5x+4y$ 之最小值

	（0，42）	（6，21）	（18，3）	（24，0）
$5x+4y$	168	114	102 最小	120

當 $x=18$，$y=3$ 時，$5x+4y$ 有最小值 102

故使用第一種飼料 18 公斤，使用第二種飼料 3 公斤可得最少的飼料成本 102 元

例題 7

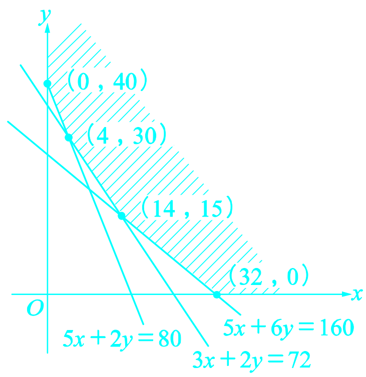
某歌唱訓練班根據以往的經驗得知：每花 10 萬元在報章雜誌上替歌手打廣告可以提升歌手的形象指數 5 點，知名度指數 10 點；反之，若是在電台上，同樣花 10 萬元替歌手打廣告，則可以提升歌手的形象指數 6 點，知名度指數 4 點．根據市場調查發現成為名歌星的形象指數至少 160 點，知名度指數亦至少 160 點，而且綜合指數（形象指數與知名度指數的和）至少 360 點．試問：歌唱訓練班要讓一位新歌手（假設其形象指數與知名度指數皆為 0）成為名歌星至少應該花多少廣告費？這些廣告費報章雜誌與電台應各分配多少，效果最好．（請在坐標平面上畫圖求解）【91.指考乙】

■：設需花費報章雜誌費 $10x$ 萬元，電台費 $10y$ 萬元

則 $\begin{cases} x\geqq 0，y\geqq 0 \\ 5x+6y\geqq 160 \\ 10x+4y\geqq 160 \\ 15x+10y\geqq 360 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geqq 0，y\geqq 0 \\ 5x+6y\geqq 160 \\ 5x+2y\geqq 80 \\ 3x+2y\geqq 72 \end{cases}$

欲求目標函數 $f(x，y)=x+y$ 之最小值

作不等式組之圖形如右



$(x，y)$	$f(x，y)=x+y$
(32，0)	32
(14，15)	29 →最小值
(4，30)	34
(0，40)	40

∴廣告費應分配報章雜誌 140 萬元，電台 150 萬元，
可得最小花費為 290 萬元

例題 8

某公司所生產的產品存放在甲、乙兩倉庫分別有 50 單位，40 單位，現在市場 A，市場 B 分別的需求量是 20 單位，30 單位，右表是各倉庫運輸到各市場的每單位運輸成本．在滿足 A，B 市場的需求下，最節省的運輸成本為________元．

	市場 A	市場 B
倉庫甲	500 元	450 元
倉庫乙	400 元	300 元

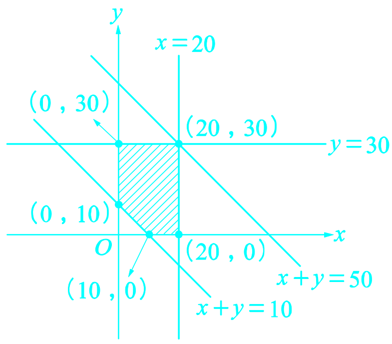
【92.指考乙】

■：設甲倉庫運送 x 單位至市場 A

運送 y 單位至市場 B

則乙倉庫運送 $(20-x)$ 單位至市場 A

運送 $(30-y)$ 單位至市場 B



$$\begin{cases} x+y\leqq 50 \\ (20-x)+(30-y)\leqq 40 \\ 0\leqq x\leqq 20 \\ 0\leqq y\leqq 30 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y\leqq 50 \\ x+y\geqq 10 \\ 0\leqq x\leqq 20 \\ 0\leqq y\leqq 30 \end{cases}$$

目標函數 $f(x,y)=500x+450y+400(20-x)+300(30-y)$

$=100x+150y+17000$

由

(x,y)	$(10,0)$	$(20,0)$	$(20,30)$	$(0,30)$	$(0,10)$
$100x+150y+17000$	18000	19000	23500	21500	18500

$\therefore$ 當 $x=10$，$y=0$ 時，最小運輸成本為 18000 元

第　章 綜合練習

1. 設 x，y，z 均為正數，且 $x+y+z=9$，則當序組（x，y，z）＝________時，$\frac{4}{x}+\frac{9}{y}+\frac{1}{z}$ 有最小值為________。

■：$[(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2+(\sqrt{z})^2][(\frac{2}{\sqrt{x}})^2+(\frac{3}{\sqrt{y}})^2+(\frac{1}{\sqrt{z}})^2]\geqq(2+3+1)^2$

⇨ $(x+y+z)(\frac{4}{x}+\frac{9}{y}+\frac{1}{z})\geqq 36$

⇨ $9\times(\frac{4}{x}+\frac{9}{y}+\frac{1}{z})\geqq 36$ ⇨ $\frac{4}{x}+\frac{9}{y}+\frac{1}{z}\geqq 4$

等號在 $\frac{\sqrt{x}}{\frac{2}{\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{y}}{\frac{3}{\sqrt{y}}}=\frac{\sqrt{z}}{\frac{1}{\sqrt{z}}}$ ⇨ $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1}$ 且 $x+y+z=9$ 時成立

解之得 $x=3$，$y=\frac{9}{2}$，$z=\frac{3}{2}$

故當序組（x，y，z）＝（3，$\frac{9}{2}$，$\frac{3}{2}$）時，$\frac{4}{x}+\frac{9}{y}+\frac{1}{z}$ 有最小值 4

2. 設 a，$b\in\mathbb{R}$，則當數對（a，b）＝________時，$a^2+b^2+(1-2a-3b)^2$ 有最小值為________。

■：令 $c=1-2a-3b$ ⇨ $2a+3b+c=1$

原題可改爲已知 $2a+3b+c=1$，求 $a^2+b^2+c^2$ 之最小值

$(a^2+b^2+c^2)(2^2+3^2+1^2)\geqq(2a+3b+c)^2$

⇨ $(a^2+b^2+c^2)\times 14\geqq 1$ ⇨ $a^2+b^2+c^2\geqq\frac{1}{14}$

等號在 $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{1}=t$ 且 $2a+3b+c=1$ 時成立

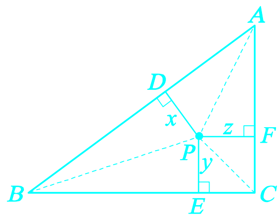
令 $a=2t$，$b=3t$，$c=t$ 代入得 $4t+9t+t=1$

⇨ $t=\frac{1}{14}$ ⇨ $a=\frac{1}{7}$，$b=\frac{3}{14}$，$c=\frac{1}{14}$

故當數對（a，b）＝（$\frac{1}{7}$，$\frac{3}{14}$）時，$a^2+b^2+(1-2a-3b)^2$ 有最小值爲 $\frac{1}{14}$

3. 設△ABC 三邊長為 $a=\overline{BC}=4$，$b=\overline{CA}=3$，$c=\overline{AB}=5$．若 P 為三角形內部任一點，且 P 到 $\overline{AB}$，$\overline{BC}$，$\overline{AC}$ 之垂直距離依次為 x，y，z．試求 xyz 之最大值為________，又此時序組（x，y，z）＝________．

■：$\because$△ABC 之面積$=\frac{1}{2}\times4\times3=6$



又設 $\overline{PD}=x$，$\overline{PE}=y$，$\overline{PF}=z$

則△ABC 之面積爲

$\frac{1}{2}\times5\times x+\frac{1}{2}\times4\times y+\frac{1}{2}\times3\times z=6 \Rightarrow 5x+4y+3z=12$

由算術平均數≧幾何平均數知 $\frac{5x+4y+3z}{3}\geqq\sqrt[3]{5x\cdot4y\cdot3z}$

$\Rightarrow 60xyz\leqq(\frac{12}{3})^3=64 \Rightarrow xyz\leqq\frac{16}{15}$

等號在 $5x=4y=3z$ 且 $5x+4y+3z=12$ 時成立

解之得 $x=\frac{4}{5}$，$y=1$，$z=\frac{4}{3}$

故當序組（x，y，z）＝（$\frac{4}{5}$，1，$\frac{4}{3}$）時，xyz 之最大值爲 $\frac{16}{15}$

4. 二次不等式 $ax^2-2ax+2a-5<0$ 的解為 $-1<x<3$，則 $a=$________．

■：以 $-1<x<3$ 之解的不等式爲 $(x+1)(x-3)<0$，即 $x^2-2x-3<0$

$\because ax^2-2ax+(2a-5)<0$ 的解也爲 $-1<x<3$

$\therefore ax^2-2ax+(2a-5)<0$ 與 $x^2-2x-3<0$ 爲同義不等式

故 $\frac{a}{1}=\frac{-2a}{-2}=\frac{2a-5}{-3}$ 且 $a>0$，交叉相乘得

$-3a=2a-5 \Rightarrow a=1$

5. 不等式 $|2x-3|<5-x^2$ 之解為________ .

■：⑴ 當 $x\geqq\frac{3}{2}$ 時，$|2x-3|<5-x^2$ ⇨ $2x-3<5-x^2$

⇨ $x^2+2x-8<0$ ⇨ $(x+4)(x-2)<0$

⇨ $-4<x<2$，但 $x\geqq\frac{3}{2}$ ∴ $\frac{3}{2}\leqq x<2$

⑵ 當 $x<\frac{3}{2}$ 時，$|2x-3|<5-x^2$ ⇨ $-2x+3<5-x^2$ ⇨ $x^2-2x-2<0$

⇨ $1-\sqrt{3}<x<1+\sqrt{3}$，但 $x<\frac{3}{2}$ ∴ $1-\sqrt{3}<x<\frac{3}{2}$

取⑴、⑵之聯集得 $1-\sqrt{3}<x<2$

6. 滿足 $\frac{x+y}{2}=\frac{y+z}{3}=\frac{z+x}{7}$ 之實數 x，y，z 恆能使不等式 $x^2+y^2+z^2+a(x+y+z)>-26$ 成立，則實數 a 的範圍為________ .

■：令 $\frac{x+y}{2}=\frac{y+z}{3}=\frac{z+x}{7}=k$

則 $\begin{cases} x+y=2k \\ y+z=3k \\ z+x=7k \end{cases}$ ⇨ $\begin{cases} x=3k \\ y=-k \\ z=4k \end{cases}$ 代入原式得

$9k^2+k^2+16k^2+a(3k-k+4k)>-26$ 恆成立

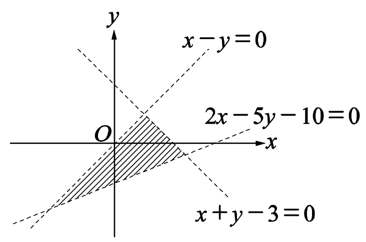
⇨ $26k^2+6ak+26>0$ 恆成立

$\therefore D=(6a)^2-4\times26\times26<0$

⇨ $9a^2<26\times26$

⇨ $-\frac{26}{3}<a<\frac{26}{3}$

7. 如右圖，可用下列哪一組不等式表示？



(A) $\begin{cases} x-y>0 \\ 2x-5y-10<0 \\ x+y-3>0 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x-y>0 \\ 2x-5y-10>0 \\ x+y-3<0 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x-y<0 \\ 2x-5y-10<0 \\ x+y-3<0 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x-y>0 \\ 2x-5y-10<0 \\ x+y-3<0 \end{cases}$

(E) $\begin{cases} x-y>0 \\ 2x-5y-10>0 \\ x+y-3>0 \end{cases}$

■：斜線部分在 $x-y=0$ 之右半平面

在 $2x-5y-10=0$ 之左半平面

在 $x+y-3=0$ 之左半平面

故選(D)

8. 若 $4x-y-7\leqq 0$，$3x-4y+11\geqq 0$，$x+3y-5\geqq 0$，則：

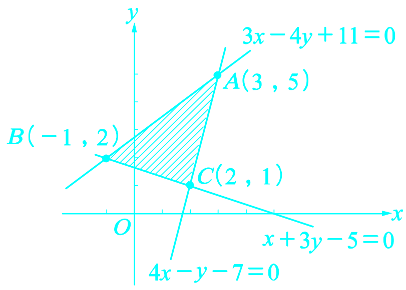
(1) $x-y$ 之最大值為________，最小值為________。

(2) x^2+y^2 之最大值為________，最小值為________。

(3) $\dfrac{x}{y}$ 之最大值為________，最小值為________。

■：(1)

(x,y)	$x-y$
$(3,5)$	-2
$(-1,2)$	-3……最小值
$(2,1)$	1……最大值



故最大值為 1，最小值為 −3

(2) $x^2+y^2=\left[\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}\right]^2$

最大值為 $\left[\sqrt{(3-0)^2+(5-0)^2}\right]^2=34$

最小值為 $[d(O,\overleftrightarrow{BC})]^2=\left(\dfrac{|0+0-5|}{\sqrt{10}}\right)^2=\dfrac{5}{2}$

(3) 設 $\dfrac{x}{y}=m$，$y=\dfrac{1}{m}x \Rightarrow \dfrac{1}{m}\geqq\dfrac{1}{2}$ 或 $\dfrac{1}{m}\leqq -2$

$\therefore -\dfrac{1}{2}\leqq m\leqq 2$

$\therefore \dfrac{x}{y}$ 的最大值為 2，最小值為 $-\dfrac{1}{2}$

第 **3** 章綜合練習

9. 欲製造一容積至少 108π 立方公尺的圓柱形無蓋容器，已知底半徑比高多 3 公尺，則半徑至少為________公尺。

■：設底半徑爲 x 公尺，則高爲（$x-3$）公尺

則容積爲 $\pi\times x^2\times(x-3)\geqq 108\pi$

⇨ $x^3-3x^2-108\geqq 0$

⇨ $(x-6)(x^2+3x+18)\geqq 0$

但 $x^2+3x+18$ 恆正

$\therefore x-6\geqq 0$ ⇨ $x\geqq 6$

故半徑至少爲 6 公尺

10. 某進出口公司有甲、乙兩座儲倉，儲存某種原料，甲倉有原料 48 公噸，乙倉有原料 60 公噸，今公司接到 A，B 兩地訂購原料，分別是訂購 A 地 36 公噸，B 地 44 公噸，進出口公司洽商送貨公司得知運費如右表，單位為元／公噸，問應如何運送，才能使運費最少？

	A 地	B 地
甲倉	500 元	600 元
乙倉	650 元	700 元

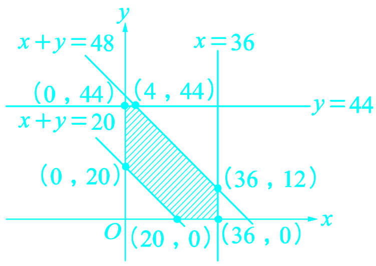
■：設甲倉運 x 公噸至 A 地，y 公噸至 B 地

乙倉運（$36-x$）公噸至 A 地，（$44-y$）公噸至 B 地

由題意知 $\begin{cases} 0\leqq x\leqq 36 \\ 0\leqq y\leqq 44 \\ x+y\leqq 48 \\ (36-x)+(44-y)\leqq 60 \end{cases}$ ⇨ $\begin{cases} 0\leqq x\leqq 36 \\ 0\leqq y\leqq 44 \\ x+y\leqq 48 \\ x+y\geqq 20 \end{cases}$，且 x，y 爲整數

欲求 $500x+600y+(36-x)\cdot 650+700\cdot(44-y)$

$=-150x-100y+54200$ 之最小值



$\because$

(x, y)	$-150x-100y+54200$
(0，20)	52200
(20，0)	51200
(36，0)	48800
(36，12)	47600……最小值
(4，44)	49200
(0，44)	49800

亦即甲倉運 36 公噸至 A 地，運 12 公噸至 B 地；乙倉運 0 公噸至 A 地，運 32 公噸至 B 地，可使運費最少爲 47600 元