2-6 反方陣

例題 1

已知 $A=\begin{bmatrix} a^2 & 0 & 3 \\ 5 & a & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，若 A 沒有反方陣，則實數 $a=$________．

解：$\because A$ 沒有反方陣 ⇨ A^{-1} 不存在 ⇨ $\begin{vmatrix} a^2 & 0 & 3 \\ 5 & a & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$ ⇨ $a^3-9a=0$

⇨ $a(a^2-9)=0$ ⇨ $a(a+3)(a-3)=0$ ⇨ $a=0，-3，3$

例題 2

設 $A=\begin{bmatrix} 2 & x \\ 3 & y \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$，

(1) 若 $AB=O$，則數對 $(x，y)=$________．

(2) 若 $AB=BA$，則數對 $(x，y)=$________．

解：(1) $\because AB=O$

$\therefore \begin{bmatrix} 2 & x \\ 3 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ⇨ $\begin{bmatrix} 4-2x & -2+x \\ 6-2y & -3+y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

⇨ $\begin{cases} 4-2x=0 \\ 6-2y=0 \end{cases}$ ⇨ $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$，故數對 $(x，y)=(2，3)$

(2) $\because AB=BA$

$\therefore \begin{bmatrix} 2 & x \\ 3 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & x \\ 3 & y \end{bmatrix}$

⇨ $\begin{bmatrix} 4-2x & -2+x \\ 6-2y & -3+y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2x-y \\ -1 & -2x+y \end{bmatrix}$

⇨ $\begin{cases} 4-2x=1 \\ 6-2y=-1 \\ -2+x=2x-y \\ -3+y=-2x+y \end{cases}$ ⇨ $\begin{cases} x=\dfrac{3}{2} \\ y=\dfrac{7}{2} \end{cases}$，故數對 $(x，y)=(\dfrac{3}{2}，\dfrac{7}{2})$

例題 3

設 $A=\begin{bmatrix} 2 & x \\ 3 & y \end{bmatrix}$，若 $A=A^{-1}$，則數對 $(x，y)=$________．

解：$\because A=A^{-1}$ ⇨ $AA=A^{-1}A$ ⇨ $A^2=I$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & x \\ 3 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & x \\ 3 & y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4+3x & 2x+xy \\ 6+3y & 3x+y^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} 4+3x=1 \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ 2x+xy=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ② \\ 6+3y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ③ \\ 3x+y^2=1 \cdots\cdots\cdots\cdots ④ \end{cases}$

由①、③得 $x=-1$，$y=-2$ 代入②、④滿足方程式故數對 $(x,y)=(-1,-2)$

例題 4

設 n 階方陣 A 的乘法反方陣存在，I 為 n 階單位方陣。若 A 滿足方程式 $X^2-3X-4I=O$，

則 $A^{-1}=$ (A) $\frac{1}{4}A-\frac{3}{4}$ (B) $\frac{1}{4}A+\frac{3}{4}$ (C) $\frac{1}{4}A-\frac{3}{4}I$ (D) $\frac{1}{4}A+\frac{3}{4}I$ (E)以上皆非。

解：$\because A^2-3A-4I=O \Rightarrow 4I=A^2-3A$

$\Rightarrow 4I=A(A-3I) \Rightarrow I=A(\frac{1}{4}A-\frac{3}{4}I) \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{4}A-\frac{3}{4}I$ 故選(C)

例題 5

設 $A=\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$，則 $A^{-1}=$________。

解：$A=\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A=\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -7 & 2 \end{vmatrix}=10-7=3$

$\therefore A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$

例題 6

設 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$，$AB=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，則 $B=$________。

解：$\because A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=4-6=-2$

$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$\because AB=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}AB=A^{-1}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow B=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$$

例題 7

設 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 10\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$，

(1) 若 $AX=B$，則 $X=$________。

(2) 若 $YA=B$，則 $Y=$________。

解：$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 10\end{vmatrix}=10-8=2$ $\quad\therefore A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}10 & -2\\ -4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -1\\ -2 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

(1) $AX=B \Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B \Rightarrow X=A^{-1}B=\begin{bmatrix}5 & -1\\ -2 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{bmatrix}$

(2) $YA=B \Rightarrow YAA^{-1}=BA^{-1} \Rightarrow Y=BA^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -1\\ -2 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -\frac{3}{2}\\ 10 & -2\end{bmatrix}$

例題 8

設 $A=\begin{bmatrix}-5 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$，$X$ 為 2x3 階矩陣且滿足 $AX=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 6 & -2 & 5\end{bmatrix}$，則矩陣 $X=$________

解：$\because A=\begin{bmatrix}-5 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \det A=\begin{vmatrix}-5 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-5+4=-1$

$\therefore A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -2 & 5\end{bmatrix}$

$\because AX=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 6 & -2 & 5\end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 6 & -2 & 5\end{bmatrix}$

$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 6 & -2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & -6 & 9\\ 28 & -14 & 23\end{bmatrix}$

例題 9

設 $A=\begin{bmatrix}1 & -4 & 1\\ 4 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -3\end{bmatrix}$，試利用矩陣的列運算求 $A^{-1}=$________。

解：$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 4 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$ $\begin{array}{l}\times(-4)\\ \times(-2)\end{array}$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{rrr|rrr}1 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 15 & -2 & -4 & 1 & 0\\ 0 & 10 & -5 & -2 & 0 & 1\end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \times\frac{1}{15}\\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{rrr|rrr}1 & -4 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \frac{-2}{15} & \frac{-4}{15} & \frac{1}{15} & 0\\ 0 & 10 & -5 & -2 & 0 & 1\end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \times 4\\ \times(-10)\end{array}$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{rrr|rrr}1 & 0 & \frac{7}{15} & \frac{-1}{15} & \frac{4}{15} & 0\\ 0 & 1 & \frac{-2}{15} & \frac{-4}{15} & \frac{1}{15} & 0\\ 0 & 0 & \frac{-11}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} & 1\end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ \times\left(\frac{-3}{11}\right)\end{array}$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{rrr|rrr}1 & 0 & \frac{7}{15} & \frac{-1}{15} & \frac{4}{15} & 0\\ 0 & 1 & \frac{-2}{15} & \frac{-4}{15} & \frac{1}{15} & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{11} & \frac{2}{11} & \frac{-3}{11}\end{array}\right]\begin{array}{l}\times\left(\frac{-7}{15}\right)\\ \\ \times\frac{2}{15}\end{array}$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{rrr|rrr}1 & 0 & 0 & \frac{1}{55} & \frac{10}{55} & \frac{7}{55}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{-16}{55} & \frac{5}{55} & \frac{-2}{55}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{-2}{11} & \frac{2}{11} & \frac{-3}{11}\end{array}\right]$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{55} & \frac{10}{55} & \frac{7}{55}\\ \frac{-16}{55} & \frac{5}{55} & \frac{-2}{55}\\ \frac{-2}{11} & \frac{2}{11} & \frac{-3}{11}\end{bmatrix}=\frac{1}{55}\begin{bmatrix}1 & 10 & 7\\ -16 & 5 & -2\\ -10 & 10 & -15\end{bmatrix}$$

例題 10

設 $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 5\\ 4 & 0 & -3\\ 8 & 1 & -4\end{bmatrix}$，則 $A^{-1}=$________.

解：

$$\det A=\begin{vmatrix}2 & 3 & 5\\ 4 & 0 & -3\\ 8 & 1 & -4\end{vmatrix}=-72+20+48+6=2$$

$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -8 & 4 \\ 17 & -48 & 22 \\ -9 & 26 & -12 \end{bmatrix}^t=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 17 & -9 \\ -8 & -48 & 26 \\ 4 & 22 & -12 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{17}{2} & \frac{-9}{2} \\ -4 & -24 & 13 \\ 2 & 11 & -6 \end{bmatrix}$

例題 11

設 $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$，則：(1) A^{-1} 之（2，3）元為____．(2) A^{-1} 之（1，2）元為____．

解：

$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix}=6+12+0-12-5-0=1$

(1) 畫掉 A 之 3 列 2 行，得 A^{-1} 的（2，3）元爲

$\frac{1}{\det A}\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{1}\times(-1)\times 1=-1$

(2) 畫掉 A 之 2 列 1 行，得 A^{-1} 的（1，2）元爲

$\frac{1}{\det A}\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}=\frac{1}{1}\times(-1)\times 2=-2$

例題 12

設 $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -2 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，試求滿足 $AX=B$ 之矩陣 $X=$________．

解：

$AX=B \Rightarrow X=A^{-1}B$，而由公式法可得 $A^{-1}=\begin{bmatrix} -4 & -2 & 3 \\ -13 & -7 & 9 \\ 7 & 4 & -5 \end{bmatrix}$

$\therefore X=\begin{bmatrix} -4 & -2 & 3 \\ -13 & -7 & 9 \\ 7 & 4 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$