2-5 克拉瑪公式

例題 1

試以克拉瑪公式解方程組 $\begin{cases} 15x+4y=-3 \\ 32x+13y=7 \end{cases}$．

解：$D=\begin{vmatrix} 15 & 4 \\ 32 & 13 \end{vmatrix}=15\times 13-4\times 32=195-128=67$

$D_x=\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 7 & 13 \end{vmatrix}=-39-28=-67$

$D_y=\begin{vmatrix} 15 & -3 \\ 32 & 7 \end{vmatrix}=105+96=201$

$\therefore x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{-67}{67}=-1$　　$y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{201}{67}=3$　　故方程組之解（x，y）＝（-1，3）

例題 2

試就 a 值討論方程組 $\begin{cases} 6x+(a-2)y=7a-17 \\ (a+5)x-2y=-8a-24 \end{cases}$ 之解，並說明其幾何意義．

解：$D=\begin{vmatrix} 6 & a-2 \\ a+5 & -2 \end{vmatrix}=-a^2-3a-2=-(a+1)(a+2)$

$D_x=\begin{vmatrix} 7a-17 & a-2 \\ -8a-24 & -2 \end{vmatrix}=8a^2-6a-14=2(a+1)(4a-7)$

$D_y=\begin{vmatrix} 6 & 7a-17 \\ a+5 & -8a-24 \end{vmatrix}=-7a^2-66a-59=-(a+1)(7a+59)$

令 L_1：$6x+(a-2)y=7a-17$，L_2：$(a+5)x-2y=-8a-24$

(1) 當 $a\neq -1$ 且 $a\neq -2$ 時，$D\neq 0$

此時方程組恰有一組解，表示 L_1 與 L_2 相交於一點

$\Rightarrow x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{2(4a-7)}{-(a+2)}$，$y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{7a+59}{a+2}$

$\therefore (x, y)=\left(\dfrac{2(4a-7)}{-(a+2)}, \dfrac{7a+59}{a+2}\right)$，即爲交點坐標

(2) 當 $a=-1$ 時，$D=D_x=D_y=0$

此時方程組有無限多組解，表示 L_1 與 L_2 爲兩重合直線

$\Rightarrow 6x-3y=-24 \Rightarrow 2x-y=-8$

令 $x=t$，$y=2t+8$，$t\in\mathbb{R}$ 爲其解，亦爲 L_1，L_2 重合直線的參數表示法

(3) 當 $a=-2$ 時，$D=0$，但 $D_x\neq 0$，$D_y\neq 0$

此時方程組無解，表示 L_1 與 L_2 爲兩平行直線

例題 3

方程組 $\begin{cases} x+3y+2z=4 \\ 2x+y+3z=7 \\ 3x+2y+z=9 \end{cases}$ 之解為________，其幾何意義為________。

解：

$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=18$，$D_x=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 7 & 1 & 3 \\ 9 & 2 & 1 \end{vmatrix}=50$，$D_y=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix}=2$，$D_z=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix}=8$

$x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{50}{18}=\dfrac{25}{9}$，$y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{2}{18}=\dfrac{1}{9}$，$z=\dfrac{D_z}{D}=\dfrac{8}{18}=\dfrac{4}{9}$

故方程組恰有一解 $\left(\dfrac{25}{9},\dfrac{1}{9},\dfrac{4}{9}\right)$

即三平面相交於一點 $\left(\dfrac{25}{9},\dfrac{1}{9},\dfrac{4}{9}\right)$

例題 4

方程組 $\begin{cases} 4x+3y+z=6 \\ 2x+y-z=4 \\ x+y+z=1 \end{cases}$ 之解為________，其幾何意義為________。

解：$\because D=D_x=D_y=D_z=0$ $\therefore$ 方程組可能無解或無限多組解

$\therefore$ 令 $\begin{cases} 4x+3y+z=6 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ 2x+y-z=4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \\ x+y+z=1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$

①－②x2 $y+3z=-2$

③x4－① $y+3z=-2$ 故爲無限多解

令 $z=t$ ⇨ $y=-3t-2$ 代入③

$x-3t-2+t=1$ ⇨ $x=2t+3$

故方程組之解爲 $\begin{cases} x=2t+3 \\ y=-3t-2 \\ z=t \end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$ 其幾何意義爲三相異平面交於一直線

例題 5

方程組 $\begin{cases} x+2y-3z=2 \\ 2x+4y-6z=3 \\ 5x-3y+4z=3 \end{cases}$ 之解為________，其幾何意義為________。

解：

$\because D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix}=0$

$D_x=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & -6 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix}=32-36+27+36-24-36=-1\neq 0$ $\therefore$方程組無解

又 $x+2y-3z=2$ 與 $2x+4y-6z=3$ 爲兩平行平面

故其幾何意義爲兩平行平面，第三個平面分別與這兩平面相交於一直線

例題 6

設方程組 $\begin{cases} x+3y+5z=kx \\ x+3y+5z=ky \\ x+3y+5z=kz \end{cases}$ 有異於（0，0，0）之解，則 $k=$________。

解：$\begin{cases} x+3y+5z=kx \\ x+3y+5z=ky \\ x+3y+5z=kz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-k)x+3y+5z=0 \\ x+(3-k)y+5z=0 \\ x+3y+(5-k)z=0 \end{cases}$

$\because$有異於（0，0，0）之解 $\therefore$方程組有無限多組解

即 $\begin{vmatrix} 1-k & 3 & 5 \\ 1 & 3-k & 5 \\ 1 & 3 & 5-k \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 9-k & 3 & 5 \\ 9-k & 3-k & 5 \\ 9-k & 3 & 5-k \end{vmatrix}$

×1 ×1

$=(9-k)\times\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3-k & 5 \\ 1 & 3 & 5-k \end{vmatrix}$ ×（−1） ×（−1）

$=(9-k)\times\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{vmatrix}$

$=(9-k)\times k^2=0 \Rightarrow k=0$ 或 $k=9$

例題 7

設方程組 $\begin{cases} x+ay-z=-4 \\ 2x+5y+z=-1 \\ x+5y-7z=b \end{cases}$，其中 a，$b\in\mathbb{R}$，有無限多組解，則：

(1) 數對 $(a, b)=$________．

(2) 方程組之解為________．

解：(1) ∵有無限多組解　∴$D=0$ 且 $D_y=0$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -35+a-10+5+14a-5=0 \Rightarrow 15a=45 \Rightarrow a=3$$

$$\text{又 } D_y=\begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & b & -7 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 7-4-2b-1-b-56=0 \Rightarrow 3b=-54 \Rightarrow b=-18$$

故數對 $(a, b)=(3, -18)$

(2) 方程組 $\begin{cases} x+3y-z=-4 \cdots\cdots\cdots ① \\ 2x+5y+z=-1 \cdots\cdots\cdots ② \\ x+5y-7z=-18 \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$

①×2−② ⇒ $y-3z=-7$，令 $z=t$ ⇒ $y=3t-7$

代入③得 $x+5(3t-7)-7t=-18$ ⇒ $x=-8t+17$

故方程組之解爲 $\begin{cases} x=-8t+17 \\ y=3t-7 \\ z=t \end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$

例題 8

若方程組 $\begin{cases} (3-2k)x+(2-k)y+z=k \\ (2-k)x+(2-k)y+z=1 \\ x+y+(2-k)z=1 \end{cases}$ 無解，則 $k=$________．

解：

$\times(k-2)$

$$∵\text{方程組無解}\quad ∴D=\begin{vmatrix} 3-2k & 2-k & 1 \\ 2-k & 2-k & 1 \\ 1 & 1 & 2-k \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3-2k & 0 & 1 \\ 2-k & 0 & 1 \\ 1 & -(k-2)^2+1 & 2-k \end{vmatrix}=0 \Rightarrow [(k-2)^2-1]\times\begin{vmatrix} 3-2k & 1 \\ 2-k & 1 \end{vmatrix}=0$$

$\Rightarrow (k^2-4k+3)(3-2k-2+k)=0$

$\Rightarrow (k-1)(k-3)(k-1)=0 \Rightarrow k=1$ 或 $k=3$

當 $k=1$ 時，$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$ 爲三重合平面　∴有無限多組解

當 $k=3$ 時，$\begin{cases} -3x-y+z=3 \\ -x-y+z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases}$ 爲兩平行平面，第三個平面分別與這兩平面相交於一直線

∴無解

故當 $k=3$ 時，方程組無解

例題 9

若三平面 $5x+y+2z=-1$，$5x-7y+z=-18$ 與 $3x-y+z=a$ 相交於一直線，則 $a=$________。

解：∵三平面交於一直線

$\therefore \begin{cases} 5x+y+2z=-1 \\ 5x-7y+z=-18 \\ 3x-y+z=a \end{cases}$ 有無限多組解 ⇨ $D_x=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -18 & -7 & 1 \\ a & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$

⇨ $7+a+36+14a+18-1=0$ ⇨ $15a+60=0$ ⇨ $a=-4$

例題 10

試就 a 之值討論方程組 $\begin{cases} x+4y-7z=a \\ x+2y+z=3 \\ 2x+5y-2z=5 \end{cases}$ 解的情形。

解：

$\because D=\begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \end{vmatrix}=0$，$D_x=\begin{vmatrix} a & 4 & -7 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & -2 \end{vmatrix}=-9(a-1)$

(1) 當 $a\neq 1$ 時，$D=0$，$D_x\neq 0$　∴方程組無解

(2) 當 $a=1$ 時，代入方程組得 $\begin{cases} x+4y-7z=1 \cdots\cdots\text{①} \\ x+2y+z=3 \cdots\cdots\text{②} \\ 2x+5y-2z=5 \cdots\cdots\text{③} \end{cases}$

①－②得 $2y-8z=-2$
③－②x2 得 $y-4z=-1$
⇨方程組有無限多組解

令 $z=t$ ⇨ $y=4t-1$ 代入①　得 $x+4(4t-1)-7t=1$

⇨ $x+16t-4-7t=1$ ⇨ $x=-9t+5$

⇨ 方程組之解爲 $\begin{cases} x=-9t+5 \\ y=4t-1 \\ z=t \end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$