2-4 行列式

例題 1

試求 $\begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix}=$______.

解：$\begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix}=14+5+36+15+8-21=57$

例題 2

試求 $\begin{vmatrix} 14 & 21 & 35 \\ 22 & 121 & 55 \\ 6 & 2 & 15 \end{vmatrix}=$______.

解：$\begin{vmatrix} 14 & 21 & 35 \\ 22 & 121 & 55 \\ 6 & 2 & 15 \end{vmatrix}=7\times11\times\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 11 & 5 \\ 6 & 2 & 15 \end{vmatrix}=77\times2\times5\times\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 11 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

$=770\times(33+9+2-33-9-2)=770\times0=0$

例題 3

設矩陣 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$，則：

(1) $\det(2A-3B)=$______. (2) $\det(AB)=$______.

解：

(1) $2A-3B=2\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}-3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 8 \\ -2 & 4 & 4 \\ 6 & 4 & -8 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -6 & 3 & 6 \\ 6 & 9 & -12 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 4 \end{bmatrix}$

$\det(2A-3B)=\begin{vmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 4 \end{vmatrix}=-4+0+20-0+64+10=90$

(2) $\det A=\begin{vmatrix}1&1&4\\-1&2&2\\3&2&-4\end{vmatrix}=-8+6-8-24-4-4=-42$

$\det B=\begin{vmatrix}1&2&3\\-2&1&2\\2&3&-4\end{vmatrix}=-4+8-18-6-6-16=-42$

$\therefore \det(AB)=\det A\cdot\det B=(-42)(-42)=1764$

例題 4

試問下列各行列式之值，何者為 0 ？

(A) $\begin{vmatrix}375&5&0\\148&8&0\\207&7&0\end{vmatrix}$ (B) $\begin{vmatrix}11&20&2009\\12&21&2010\\13&22&2011\end{vmatrix}$ (C) $\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\b+c&c+a&a+b\end{vmatrix}$ (D) $\begin{vmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{vmatrix}$

(E) $\begin{vmatrix}a-b&b-c&c-a\\b-c&c-a&a-b\\c-a&a-b&b-c\end{vmatrix}$.

解：(A) ○：有一行爲 0

(B) ○：$\begin{vmatrix}11&20&2009\\12&21&2010\\13&22&2011\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \times(-1)\\ \times(-1)\end{matrix}=\begin{vmatrix}11&20&2009\\1&1&1\\2&2&2\end{vmatrix}=0$

(C) ○：$\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\b+c&c+a&a+b\end{vmatrix}\times1=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a+b+c&a+b+c&a+b+c\end{vmatrix}$

$=(a+b+c)\times\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\1&1&1\end{vmatrix}=(a+b+c)\times0=0$

(D) ○：$\begin{vmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{vmatrix}=0-abc+abc-0-0-0=0$

(E) ○：$\begin{vmatrix}a-b&b-c&c-a\\b-c&c-a&a-b\\c-a&a-b&b-c\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \times1\\ \times1\end{matrix}=\begin{vmatrix}0&0&0\\b-c&c-a&a-b\\c-a&a-b&b-c\end{vmatrix}=0$ 故選(A)(B)(C)(D)(E)

例題 5

$\begin{vmatrix}1&1&1\\x&15&-28\\x^2&15^2&(-28)^2\end{vmatrix}<0$ 之解為________.

解：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 15 & -28 \\ x^2 & 15^2 & (-28)^2 \end{vmatrix} = (x-15)(15+28)(-28-x) < 0$

⇨ $(x-15)(x+28) > 0$

⇨ $x > 15$ 或 $x < -28$

例題 6

設 $f(x) = \begin{vmatrix} 3-x & 4 & 5 \\ 3 & 4-x & 5 \\ 3 & 4 & 5-x \end{vmatrix}$，則：

(1) $f(x) \leqq 0$ 之解為________。

(2) 以 $x-1$ 除 $f(x)$ 之餘式為________。

解：

$f(x) = \begin{vmatrix} 3-x & 4 & 5 \\ 3 & 4-x & 5 \\ 3 & 4 & 5-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12-x & 4 & 5 \\ 12-x & 4-x & 5 \\ 12-x & 4 & 5-x \end{vmatrix}$

×1　×1

$= (12-x) \times \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 1 & 4-x & 5 \\ 1 & 4 & 5-x \end{vmatrix}$　×(−1) ×(−1)　$= (12-x) \times \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix}$

$= (12-x) \times x^2$

(1) $f(x) \leqq 0$ ⇨ $(12-x) \times x^2 \leqq 0$ ⇨ $x^2(x-12) \geqq 0$ ⇨ $x=0$ 或 $x \geqq 12$

(2) 以 $x-1$ 除 $f(x)$ 之餘式爲 $f(1) = (12-1) \times 1^2 = 11$

例題 7

設 $A(1, 3)$，$B(-2, 7)$，$C(k, 8)$，若 $\triangle ABC$ 之面積為 11，則 $k=$________。

解：

$\triangle ABC$ 之面積 $= \frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 7 & 1 \\ k & 8 & 1 \end{vmatrix}$　×(−1) ×(−1)　的絕對值

$= \frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \\ k-1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ 的絕對值

$= \frac{1}{2} \times \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ k-1 & 5 \end{vmatrix}$ 的絕對值

$= \frac{1}{2} \times \left| -15 - 4(k-1) \right| = 11$

⇨ $\left| -4k-11 \right| = 22$ ⇨ $-4k-11 = 22$ 或 $-4k-11 = -22$ ⇨ $k = -\frac{33}{4}$ 或 $k = \frac{11}{4}$

例題 8

設 $A(1，3)$，$B(a+1，-1)$，$C(3，0)$ 三點共線，則 $a=$________。

解：$\because A，B，C$ 三點共線 ⇨ $\triangle ABC$ 之面積爲 0

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ a+1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -1+9+0+3-3(a+1)=0$$

$$\Rightarrow 11-3a-3=0 \Rightarrow 3a=8 \Rightarrow a=\frac{8}{3}$$

例題 9

若三直線 $L_1：4x+y=4$，$L_2：kx+y=0$，$L_3：2x-3ky=4$ 不能圍成三角形，則 k 之可能值為________。

解：不能圍成三角形的原因：(1)有平行線存在；(2)三線共點

(1) 當有平行線存在時

① 若 $L_1//L_2 \Rightarrow \frac{4}{k}=\frac{1}{1} \Rightarrow k=4$

② 若 $L_1//L_3 \Rightarrow \frac{4}{2}=\frac{1}{-3k} \Rightarrow -12k=2 \Rightarrow k=-\frac{1}{6}$

③ 若 $L_2//L_3 \Rightarrow \frac{k}{2}=\frac{1}{-3k} \Rightarrow -3k^2=2 \Rightarrow k$ 無解

(2) 三線共點

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 1 & 4 \\ k & 1 & 0 \\ 2 & -3k & 4 \end{vmatrix}=16-12k^2-8-4k=0 \Rightarrow 12k^2+4k-8=0$$

$$\Rightarrow 3k^2+k-2=0 \Rightarrow (k+1)(3k-2)=0 \Rightarrow k=-1 \text{ 或 } \frac{2}{3}$$

由(1)、(2)可知 $k=4，-\frac{1}{6}，-1，\frac{2}{3}$

例題 10

設 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，$C(x_3，y_3)$，且$\triangle ABC$ 之面積為 10，則 $A'(3x_1-4y_1，5y_1-6x_1)$，$B'(3x_2-4y_2，5y_2-6x_2)$，$C'(3x_3-4y_3，5y_3-6x_3)$ 所圍成之三角形面積為________。

解：

已知 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ 的絕對值$=10$

$$\text{而 } \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3x_1-4y_1 & 5y_1-6x_1 & 1 \\ 3x_2-4y_2 & 5y_2-6x_2 & 1 \\ 3x_3-4y_3 & 5y_3-6x_3 & 1 \end{vmatrix} \text{的絕對值} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3x_1-4y_1 & -3y_1 & 1 \\ 3x_2-4y_2 & -3y_2 & 1 \\ 3x_3-4y_3 & -3y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{的絕對值}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3x_1 & -3y_1 & 1 \\ 3x_2 & -3y_2 & 1 \\ 3x_3 & -3y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{的絕對值} = \frac{1}{2}\times(-9)\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{的絕對值} = 90$$

例題 11

已知空間中四點 $A(1,1,1)$，$B(3,4,5)$，$C(1,2,k)$，$D(4,5,k)$。若四面體 $ABCD$ 之體積為 3，則 $k=$________。

解：$\overrightarrow{AB}=(2,3,4)$，$\overrightarrow{AC}=(0,1,k-1)$，$\overrightarrow{AD}=(3,4,k-1)$

∵四面體 $ABCD$ 之體積為 3

$$\therefore \frac{1}{6}\times\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & k-1 \\ 3 & 4 & k-1 \end{vmatrix} \text{的絕對值} = 3$$

⇨ $|2(k-1)+9(k-1)-12-8(k-1)|=18$

⇨ $|3k-15|=18$ ⇨ $3k-15=18$ 或 -18 ⇨ $k=11$ 或 -1

例題 12

空間中四點 $A(0,0,0)$，$B(1,1,1)$，$C(2,1,0)$，$D(k,k,2)$ 共平面，則 $k=$________。

解：∵A，B，C，D 四點共平面

∴ $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ 所張平行六面體體積為 0

又 $\overrightarrow{AB}=(1,1,1)$，$\overrightarrow{AC}=(2,1,0)$，$\overrightarrow{AD}=(k,k,2)$

$$⇨ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ k & k & 2 \end{vmatrix} = 2+0+2k-k-4=0 ⇨ k-2=0 ⇨ k=2$$