2-3 矩陣的列運算及增廣矩陣的應用

例題 1

方程組 $\begin{cases} x-3y-2z=-4 \\ 2x+y+2z=1 \\ 4x+y+3z=1 \end{cases}$ 之

(1) 係數矩陣為________，為________階矩陣。

(2) 增廣矩陣為________，為________階矩陣。

解：

(1) 係數矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ 爲 3x3 階矩陣

(2) 增廣矩陣 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right]$ 爲 3x4 階矩陣

例題 2

利用矩陣的列運算求方程組 $\begin{cases} 2x+3y=-2 \\ x+y+z=1 \\ x-2y+z=13 \end{cases}$ 之解為________。

解：

方程組的增廣矩陣是 $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 13 \end{array}\right]$

現運算如下：$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 13 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \end{array}\right]$ $\begin{matrix} \times(-1) \\ \times(-2) \end{matrix}$

$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 13 \\ 0 & 3 & 0 & -12 \\ 0 & 7 & -2 & -28 \end{array}\right] \times\frac{1}{3} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 7 & -2 & -28 \end{array}\right]$ $\times(-7)$

$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$ 現在方程組是 $\begin{cases} x-2y+z=13 \\ y=-4 \\ -2z=0 \end{cases}$ 解是 $x=5$，$y=-4$，$z=0$

例題 3

利用矩陣的列運算求方程組 $\begin{cases} x+2y+z=7 \\ 2x+y-z=5 \\ 7x+8y+z=31 \end{cases}$ 之解為________。

解：$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 8 & 1 & 31 \end{array}\right]$ $\times(-2)$ $\times(-7)$ $\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & -3 & -9 \\ 0 & -6 & -6 & -18 \end{array}\right]$ $\times(-2)$

$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ $\therefore$方程組爲$\begin{cases} x+2y+z=7 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ -3y-3z=-9 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$

由② ⇨ $y+z=3$，令 $z=t$ ⇨ $y=3-t$ 代入①

得 $x+2(3-t)+t=7$ ⇨ $x=t+1$

故方程組之解爲$\begin{cases} x=t+1 \\ y=-t+3 \\ z=t \end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$

例題 4

利用矩陣的列運算求方程組$\begin{cases} x+y+2z=-3 \\ x+y-z=6 \\ 2x+2y-z=7 \end{cases}$之解為________．

解：$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 6 \\ 2 & 2 & -1 & 7 \end{array}\right]$ $\times(-1)$ $\times(-2)$ $\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & -5 & 13 \end{array}\right]$ $\times\left(-\frac{5}{3}\right)$

$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$

由第三列得到 $0=-2$，此爲矛盾方程式，故原方程組無解

例題 5

利用矩陣的列運算求方程組$\begin{cases} x+y-2z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ x-2y+3z=k \end{cases}$時，若有解，則 $k=$________．

解：由列運算

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & k \end{array}\right]$ $\times(-2)$ $\times(-1)$ $\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & k-1 \end{array}\right]$ $\times(-1)$

$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{array}\right]$ 若方程組有解，則 $k-1=0$ ⇨ $k=1$

例題 6

若矩陣$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 3 & 5\\ 2 & 1 & -3 & -3\\ 3 & -1 & 2 & 6\end{array}\right]$是某個方程組的增廣矩陣，則此方程組之解為________。

解：$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 3 & 5\\ 2 & 1 & -3 & -3\\ 3 & -1 & 2 & 6\end{array}\right]\begin{array}{l}\times(-2)\\ \times(-3)\end{array}\to\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 3 & 5\\ 0 & 5 & -9 & -13\\ 0 & 5 & -7 & -9\end{array}\right]\times(-1)$

$\to\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 3 & 5\\ 0 & 5 & -9 & -13\\ 0 & 0 & 2 & 4\end{array}\right]\begin{array}{l}\times\frac{1}{5}\\ \times\frac{1}{2}\end{array}\to\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 3 & 5\\ 0 & 1 & \frac{-9}{5} & \frac{-13}{5}\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right]$

方程組為$\begin{cases}x-2y+3z=5 \cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}\\ y-\frac{9}{5}z=-\frac{13}{5}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}\\ z=2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{③}\end{cases}$

由③代入②得$y-\frac{18}{5}=-\frac{13}{5}$ ⇨ $y=1$代入①

得$x-2+6=5$ ⇨ $x=1$故方程組之解為$\begin{cases}x=1\\ y=1\\ z=2\end{cases}$

例題 7

某生利用增廣矩陣的列運算求x，y，z方程組的解，得矩陣$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 3 & 16\\ 0 & 1 & -2 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$，則其解為________。

解：由題意知$\begin{cases}x+3z=16\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}\\ y-2z=6 \cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}\end{cases}$

由②令$z=t$ ⇨ $y=2t+6$　　代入①得$x=-3t+16$

故方程組的解為$\begin{cases}x=-3t+16\\ y=2t+6\\ z=t\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$

例題 8

給定 4 個列矩陣$A=[1\ \ 3\ \ 5]$，$B=[3\ \ 4\ \ 7]$，$C=[4\ \ 11\ \ 13]$，$D=[2\ \ 10\ \ 11]$，若$D=xA+yB+zC$，則序組（x，y，z）＝________。

解：$\because D=xA+yB+zC$

⇨ $[2\ \ 10\ \ 11]=x[1\ \ 3\ \ 5]+y[3\ \ 4\ \ 7]+z[4\ \ 11\ \ 13]$

$=[\,x+3y+4z \quad 3x+4y+11z \quad 5x+7y+13z\,]$

$\Rightarrow \begin{cases} x+3y+4z=2 \\ 3x+4y+11z=10 \\ 5x+7y+13z=11 \end{cases}$ 解得 $x=1$，$y=-1$，$z=1$ 故序組 $(x,y,z)=(1,-1,1)$

例題 9

下列哪些選項中的矩陣經過一系列的列運算後可以化成 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$？

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -7 & 0 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(E) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

解：

(A) ○：$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(B) ×：∵ $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -7 & 0 \end{bmatrix}$ 的最後一行為 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 必有一解為 $(0,0,0)$

但原矩陣之 $z=1$ ∴不合

(C) ×：$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(D) ×

(E) ○：只將二、三行互換即可　　故選(A)(E)

例題 10

相傳包子是三國時白羅家族發明的．孔明最喜歡吃他們所做的包子，因此白羅包子店門庭若市，一包難求，必須一大早去排隊才買得到．事實上，白羅包子店只賣一種包子，每天限量供應 999 個，且規定每位顧客限購三個；而購買一個、兩個或三個包子的價錢分別是 8，15，21 分錢．在那三國戰亂的某一天，包子賣完後，老闆跟老闆娘有如下的對話：老闆說：「賺錢真辛苦，一個包子成本就要 5 分錢，今天到底賺了多少錢？」，老闆娘說：「今天共賣了 7195 分錢，只有 432 位顧客買到包子．」

(1) 請問當天白羅包子店淨賺多少錢？

⑵ 聰明的你，請幫忙分析當天購買一個、兩個及三個包子的人數各是多少人？

解：⑴ 包子成本爲 $5\times999=4995$ $\therefore$淨賺 $7195-4995=2200$（分錢）

⑵ 設購買一個、二個、三個包子的人數分別有 x 人，y 人及 z 人

則 $\begin{cases} x+y+z=432 \cdots\cdots① \\ x+2y+3z=999 \cdots\cdots② \\ 8x+15y+21z=7195 \cdots\cdots③ \end{cases}$

②－①得 $y+2z=567$ ⋯⋯④

③－①×8 得 $7y+13z=3739$ ⋯⋯⑤

⑤－④×7 得 $-z=-230$

⇨ $z=230$ 代入④得 $y=107$，再代入①得 $x=95$

故買一個、兩個、三個包子的人數分別有 95 人，107 人及 230 人