2-2 矩陣的乘法及意義

例題 1

試計算下列矩陣的乘積．

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$．

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 7 & 5 \end{bmatrix}$．

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$．

(4) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$．

解：(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2+4 & -7+6 \\ -2+6 & -7+9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 7 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4+0+8 & 1-2+28 & 4+6+20 \\ 8+0+0 & 2-6+0 & 8+18+0 \\ 4+0+2 & 1+1+7 & 4-3+5 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 \\ 8 & -4 & 26 \\ 6 & 9 & 6 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 6 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3-2 & 4+12 & 5+4 \\ 9-4 & 12+24 & 15+8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 16 & 9 \\ 5 & 36 & 23 \end{bmatrix}$

(4) 不能相乘

例題 2

已知 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$，則 $A(3B-2C)=$____

解：$3B-2C=3\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}-2\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 9 & 15 & 9 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 8 & 8 & 10 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 7 & -1 \end{bmatrix}$

$A(3B-2C)=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & 7 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 11 & -1 \\ 3 & 27 & -5 \end{bmatrix}$

例題 3

設 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} k & 2 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$，若 $AB=BA$，則 $k=$________．

解：$AB=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k&2\\3&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k+6&20\\3k+12&42\end{bmatrix}$

$BA=\begin{bmatrix}k&2\\3&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k+6&2k+8\\30&42\end{bmatrix}$

$\because AB=BA$

$\therefore \begin{bmatrix}k+6&20\\3k+12&42\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k+6&2k+8\\30&42\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}2k+8=20\\3k+12=30\end{cases}$ 解之得 $k=6$

例題 4

設 $A=\begin{bmatrix}1&-1\\0&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}$，則 $(A+B)(A-B)-(A^2-B^2)=$________。

解：$(A+B)(A-B)-(A^2-B^2)=A^2-AB+BA-B^2-A^2+B^2=-AB+BA$

$=-\begin{bmatrix}1&-1\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\0&2\end{bmatrix}$

$=-\begin{bmatrix}0&-2\\2&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&-1\\1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix}$

例題 5

設 $A=[a_{ij}]_{3\times2}$，$B=[b_{ij}]_{2\times3}$，其中 $a_{ij}=i-j+2$，$b_{ij}=2i+j-1$。若 $AB=[c_{ij}]_{3\times3}$，則：(1) $c_{32}=$________。 (2) $c_{13}=$________。

解：(1) $c_{32}=a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}=4\times3+3\times5=12+15=27$

(2) $c_{13}=a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}=2\times4+1\times6=8+6=14$

例題 6

設 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，若 $A^{20}=[a_{ij}]_{3\times3}$，則：

(1) $a_{12}=$________。(2) $a_{13}=$________。

解：

$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

$A^2=AA=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$

$$A^3=A^2A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&6\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^4=A^3A=\begin{bmatrix}1&3&6\\0&1&3\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4&10\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$\vdots$

(1) A^{20} 之 $a_{12}=20$

(2) A^{20} 之 $a_{13}=1+2+3+\cdots\cdots+20=\dfrac{(1+20)\times 20}{2}=210$

例題 7

設 r 為一實數，$A=[r\quad 1\quad -2]$, $B=[1\quad 3\quad -1]$. 若 $AB^t=O$，則矩陣 $B^tA=$____

解：

$$AB^t=[r\quad 1\quad -2]\begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix}=[r+3+2]=[0]\Rightarrow r+5=0\Rightarrow r=-5$$

$$\text{故 } B^tA=\begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix}[-5\quad 1\quad -2]=\begin{bmatrix}-5&1&-2\\-15&3&-6\\5&-1&2\end{bmatrix}$$

例題 8

設 $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$，則：

(1) $A^2-5A-2I_2=$________. (2) $A^4-5A^3+3A^2+2A+2I_2=$________.

解：(1) $A^2-5A-2I_2=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}7&10\\15&22\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5&10\\15&20\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

(2) $A^4-5A^3+3A^2+2A+2I_2$

$=(A^2-5A-2I_2)(A^2+5I_2)+(27A+12I_2)$

$=O+27A+12I_2$

$$=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}+27\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}+12\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}27&54\\81&108\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}12&0\\0&12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}39&54\\81&120\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1+0+5 \\ \hline
1-5-2 & 1-5+3+2+2 \\
 & 1-5-2 \\ \hline
 & \qquad 5+2+2 \\
 & \qquad 5-25-10 \\ \hline
 & \qquad\quad 27+12
\end{array}$$

例題 9

彩票公司每天開獎一次，從 1，2，3 三個號碼中隨機開出一個．開獎時，如果開出的號碼和前一天相同，就要重開，直到開出與前一天不同的號碼為止，如果在第一天開出的號碼是 3，則在第五天開出號碼同樣是 3 的機率是________．(以最簡分數表示)

解：

$$\text{轉移矩陣 } A=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1\text{號} & 2\text{號} & 3\text{號} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 1\text{號} \\ 2\text{號} \\ 3\text{號} \end{array}$$

令 X_k 表示第 k 天開出 1 號，2 號，3 號球的機率矩陣，則 $X_1=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow X_2=AX_1=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X_3=AX_2=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$X_4=AX_3=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$X_5=AX_4=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{5}{16} \\ \frac{5}{16} \\ \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

$\therefore$第五天開出 3 號球之機率是 $\frac{3}{8}$

例題 10

某國政府長期追蹤全國國民的經濟狀況，依訂定的標準將國民分為高收入和低收入兩類。統計發現高收入的人口一直是低收入人口的兩倍，且知在高收入的人口中，每年有四成會轉變為低收入。請問在低收入的人口中，每年有幾成會轉變為高收入？請選出正確的選項 (A) 6 成 (B) 7 成 (C) 8 成 (D) 9 成。

解：設低收入人口中，每年有 x 成轉為高收入

$\because$ 轉移矩陣 $A=\begin{bmatrix}\frac{6}{10} & x \\ \frac{4}{10} & 1-x\end{bmatrix}$ $\therefore \begin{bmatrix}\frac{6}{10} & x \\ \frac{4}{10} & 1-x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases}\frac{2}{5}+\frac{1}{3}x=\frac{2}{3} \\ \frac{4}{15}+\frac{1-x}{3}=\frac{1}{3}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}6+5x=10 \\ 4+5-5x=5\end{cases} \Rightarrow x=0.8$

$\therefore$ 每年有 8 成的低收入人口轉為高收入，故選(C)