2-1 矩陣的加法與係數積

例題 1

設二矩陣 $A=[a_{ij}]_{3\times3}$ 滿足 $a_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 2, & i\neq j\end{cases}$，$B=[b_{ij}]_{3\times3}$，若 $a_{ij}=i+j-b_{ij}$，則：

(1) $A=$________．(2) $B=$________．

解：

(1) $A=[a_{ij}]_{3\times3}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$

(2) $\because a_{ij}=i+j-b_{ij}$ ⇨ $b_{ij}=i+j-a_{ij}$

⇨ $B=[b_{ij}]_{3\times3}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&3&3\\2&3&5\end{bmatrix}$

例題 2

若 $\begin{bmatrix}x+y&z+t\\z+2t&x-2y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-2\\-6&5\end{bmatrix}$，試求序組 $(x, y, z, t)=$________．

解：由矩陣相等的定義可知

$$\begin{cases}x+y=2 \cdots\cdots\cdots① \\ z+t=-2 \cdots\cdots\cdots② \\ z+2t=-6 \cdots\cdots\cdots③ \\ x-2y=5 \cdots\cdots\cdots④\end{cases}$$

由①、④知 $x=3$，$y=-1$

由②、③知 $z=2$，$t=-4$

$\therefore$ 序組 $(x, y, z, t)=(3, -1, 2, -4)$

例題 3

設 $A=\begin{bmatrix}2&-1\\0&3\\4&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&5\\2&2\\-1&-4\end{bmatrix}$，則：

(1) $-B=$________．

(2) $A-B=$________．

(3) $2A+3B=$________．

(4) $A^t=$________．

解：

(1) $-B=\begin{bmatrix}-1 & -5\\ -2 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$

(2) $A-B=A+(-B)=\begin{bmatrix}1 & -6\\ -2 & 1\\ 5 & 6\end{bmatrix}$

(3) $2A+3B=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 0 & 6\\ 8 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 15\\ 6 & 6\\ -3 & -12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 13\\ 6 & 12\\ 5 & -8\end{bmatrix}$

(4) $A^{t}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 4\\ -1 & 3 & 2\end{bmatrix}$

例題 4

已知 $A=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\\ 0 & 4\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -3\\ 4 & -5\end{bmatrix}$，則：

(1) $(A-B)^{t}=$________. (2) $A^{t}-B^{t}=$________. (3) $(A-B)^{t}$ 與 $A^{t}-B^{t}$ 是否相等？

解：

(1) $A-B=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\\ 0 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -3\\ 4 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 0 & 4\\ -4 & 9\end{bmatrix}$

$\therefore (A-B)^{t}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & -4\\ 4 & 4 & 9\end{bmatrix}$

(2) $A^{t}-B^{t}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ -1 & -3 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & -4\\ 4 & 4 & 9\end{bmatrix}$

(3) 由(1)、(2)知 $(A-B)^{t}=A^{t}-B^{t}$

例題 5

設 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & -4 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\ 2 & 6 & 1\end{bmatrix}$，試求方程式 $X+4A=3(X+B)-A$ 之解為________.

解：$X+4A=3X+3B-A \Rightarrow 2X=5A-3B$

$=5\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & -4 & 1\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\ 2 & 6 & 1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}5 & 0 & 15\\ 10 & -20 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}9 & -6 & 3\\ 6 & 18 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 6 & 12\\ 4 & -38 & 2\end{bmatrix}$

$\Rightarrow X=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-4 & 6 & 12\\ 4 & -38 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 6\\ 2 & -19 & 1\end{bmatrix}$

例題 6

設 $A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 5 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$，若二矩陣 X，Y 滿足方程組 $\begin{cases}2X+Y=A\\ X-2Y=B\end{cases}$，則：

(1) 矩陣 $X=$________ 。 (2) 矩陣 $Y=$________ 。

解：$\begin{cases}2X+Y=A\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}\\ X-2Y=B\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}\end{cases}$

(1) ①×2＋② ⇨ $5X=2A+B=2\begin{bmatrix}0 & -1\\ 5 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 10 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -4\\ 13 & 6\end{bmatrix}$

⇨ $X=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & -4\\ 13 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{-4}{5}\\ \frac{13}{5} & \frac{6}{5}\end{bmatrix}$

(2) ①－②×2 ⇨ $5Y=A-2B=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 5 & 1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 5 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -4\\ 6 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ -1 & -7\end{bmatrix}$

⇨ $Y=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-2 & 3\\ -1 & -7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-2}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{-1}{5} & \frac{-7}{5}\end{bmatrix}$

例題 7

將 1，2，3，⋯⋯，100 等 100 個正整數，依下列方式排列成一個 10 階方陣。

$$A=\begin{bmatrix}1 \quad 3 \quad 6 \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2 \quad 5\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 4 \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 97 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 96 \quad 99 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots 95 \quad 98 \quad 100\end{bmatrix}$$

(1) 試求 $a_{46}=$________ 。(2) 若 $a_{ij}=52$，則數對 $(i,j)=$________ 。

解：(1)，(2，3)，(4，5，6)，(7，8，9，10)，⋯⋯

$$\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ a_{11} & a_{21} & a_{12} & a_{31} & a_{22} & a_{13} & a_{41} & a_{32} & a_{23} & a_{14}\end{matrix}$$

由以上觀察知 a_{ij} 在第 $i+j-1$ 群中，且爲第 j 個

(1) a_{46} 在第 $4+6-1=9$ 群中，且爲第 6 個

而前 8 群共有 $1+2+3+\cdots\cdots+8=36$ 個數$\therefore a_{46}=36+6=42$

(2) $\because 1+2+3+\cdots\cdots+9=45$，$52-45=7$　$\therefore 52$ 在第 10 群中的第 7 個數

第 10 群的排列情形觀察如下：

$a_{10,1}$，a_{92}，a_{83}，a_{74}，a_{65}，a_{56}，a_{47}，$\cdots\cdots\therefore a_{47}=52$，即 $(i,j)=(4,7)$

例題8

若矩陣 $A=\begin{bmatrix} 4 & 7 & b+2c \\ a-3b & 3 & 6 \\ 3 & 2a-c & -1 \end{bmatrix}$ 為對稱矩陣，則序組 $(a,b,c)=$________。

解：$\because A$ 爲對稱矩陣$\therefore A^t=\begin{bmatrix} 4 & a-3b & 3 \\ 7 & 3 & 2a-c \\ b+2c & 6 & -1 \end{bmatrix}=A \Rightarrow \begin{cases} a-3b=7 \\ b+2c=3 \\ 2a-c=6 \end{cases}$

解之得 $a=4$，$b=-1$，$c=2$　故序組 $(a,b,c)=(4,-1,2)$

例題 9

下列哪一個矩陣滿足 $A^t=-A$？

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。

解：$\because$若方陣 A 滿足 $A^t=-A$，則 A 必爲反對稱矩陣其型式爲 $\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$，故選(D)

例題 10

設矩陣 $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$，$a_{ij}\in\{-1,0,1,2,3\}$，其中 i，$j=1$，2，3。

(1) 若 A 滿足 $A^t=A$，則此種 A 共有________個。

(2) 若 A 滿足 $A^t=-A$，則此種 A 共有________個。

解：

(1) $A^t=A \Rightarrow A$ 爲對稱矩陣，其形狀爲 $\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$

而 a，b，c，d，e，f 可爲 -1，0，1，2，3 共有 5 種選擇

$\Rightarrow A$ 共有 $5^6=15625$（個）

(2) $A^t=-A \Rightarrow A$ 爲反對稱矩陣，其形狀爲 $\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$

而 a，b，c 可爲 -1，0，1 共有 3 種選擇 $\Rightarrow A$ 共有 $3^3=27$（個）