1-2　數學期望值與二項分配

例題 1

隨機變數 X 定義為 $X=\begin{cases} 4\text{，機率是 } \dfrac{1}{6} \\ 0\text{，機率是 } \dfrac{5}{6} \end{cases}$，則：

(1) X 的期望值為________。　(2) X 的變異數為________。

(3) X 的標準差為________。

解：(1) X 的期望值 $E(X)=4\times\frac{1}{6}+0\times\frac{5}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

(2) X 的變異數 $Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=(4^2\times\frac{1}{6}+0^2\times\frac{5}{6})-(\frac{2}{3})^2=\frac{8}{3}-\frac{4}{9}=\frac{20}{9}$

(3) X 的標準差 $\sigma=\sqrt{\frac{20}{9}}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$

例題 2

考慮有 2 個小孩的家庭，以隨機變數 X 表示男孩子的數量，則：

(1) X 的期望值為________。

(2) X 的變異數為________。

(3) X 的標準差為________。

解：隨機變數 X 的取值爲 0，1，2

又 $P(\{X=k\})=C_k^2(\frac{1}{2})^{2-k}(\frac{1}{2})^k$，其機率分別爲 $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$

(1) X 的期望值 $E(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=1$

(2) X 的變異數 $Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

$$=(0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{4})-1^2=\frac{1}{2}+1-1=\frac{1}{2}$$

(3) X 的標準差 $\sigma=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

例題 3

某職棒球員的年收入期望值為 300 萬元，標準差為 60 萬元，這職棒球員的經紀人年收入是從這名球員年收入中抽取 15 %，另外再加固定的 20 萬元，則這經紀人年收入的期望值為___萬元，標準差為________萬元。

解：以隨機變數 X 表示這名球員的年收入，則 $E(X)=300$（萬元），$\sigma=60$（萬元）

這名球員的經紀人年收入是 $0.15X+20$（萬元）

故(1) 期望值爲 $E(0.15X+20)=0.15E(X)+20=0.15\times300+20=65$（萬元）

(2) $\because Var(0.15X+20)=(0.15)^2Var(X)=(0.15)^2\times 60^2=81$

$\therefore$ 標準差爲 $\sqrt{81}=9$（萬元）

例題 4

一袋中有寫著 20，30，50，80 的卡片各一張。自袋中隨機取卡片兩次，一次一張，取後放回，以隨機變數 X 表示兩次的號碼和，則：

(1) X 的期望值為________。

(2) X 的標準差為________。

解：以 X_1 表示第一次取到的號碼

以 X_2 表示第二次取到的號碼

則 $E(X_1)=E(X_2)=\dfrac{20+30+50+80}{4}=45$

(1) X 的期望值 $E(X)=E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)=45+45=90$

(2) $Var(X_1)=Var(X_2)=\dfrac{1}{4}(20^2+30^2+50^2+80^2)-45^2=2550-2025=525$

故 X 的變異數 $Var(X)=Var(X_1+X_2)=Var(X_1)+Var(X_2)=525+525=1050$

⇨ X 的標準差爲 $\sqrt{1050}=5\sqrt{42}$

例題 5

若 X 與 Y 是獨立的隨機變數，且 $Var(X)=3$，$Var(Y)=20$，則：

(1) $Var(2X+3Y)=$________。

(2) $Var(5X-2Y)=$________。

解：(1) $\because 2X$ 與 $3Y$ 也是獨立的隨機變數

$\therefore Var(2X+3Y)=Var(2X)+Var(3Y)$

$=2^2Var(X)+3^2Var(Y)=4\times 3+9\times 20=192$

(2) $\because 5X$ 與 $-2Y$ 也是獨立的隨機變數

$\therefore Var(5X-2Y)=Var(5X)+Var(-2Y)$

$=5^2Var(X)+(-2)^2Var(Y)=25\times 3+4\times 20=155$

例題 6

(1) 設 X 是一隨機變數且 $Var(4X-6)=144$，則 X 的標準差為________。

(2) 設 X 是一隨機變數滿足 $E(5X^2)=200$，且 $E(X)=6$，則 X 的標準差為________。

解：(1) $\because Var(4X-6)=Var(4X)=16Var(X)=144$

$\therefore Var(X)=9$，故 X 的標準差爲 $\sqrt{9}=3$

(2) $E(5X^2)=5E(X^2)=200$ ⇨ $E(X^2)=40$

$\therefore Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=40-36=4$

故 X 的標準差爲 $\sqrt{4}=2$

例題 7

連續投擲一公正骰子 4 次，以隨機變數 X 表示出現點數為 5 的次數，則：

(1) X 的期望值為________。

(2) X 的變異數為________。

(3) X 的標準差為________。

解：這是參數爲（4，$\frac{1}{6}$）的二項分配

(1) X 的期望值 $E(X)=4\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

(2) X 的變異數 $Var(X)=4\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$

(3) X 的標準差 $\sigma=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

例題 8

袋中有紅球 4 個，黑球 6 個，球大小一致且被取出的機會均等，連續自袋中取球 3 次，每次取一球，取出後放回，則：

(1) 取得紅球次數的期望值為________。

(2) 取得紅球次數的標準差為________。

解：此爲 $n=3$，$p=\frac{2}{5}$ 的二項分配

(1) 取得紅球次數的期望值 $E(X)=3\times\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$

(2) 取得紅球次數的變異數 $Var(X)=3\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{18}{25}$，故標準差爲 $\sqrt{\frac{18}{25}}=\frac{3\sqrt{2}}{5}$

例題 9

調查顯示有 40 %的大學生曾有打工經驗，現抽取 5 位大學生，則至少有 3 位曾有打工經驗的機率為________。

解：此爲 $n=5$，$p=40\ \%=\frac{2}{5}$ 的二項分配，因此至少有 3 位曾有打工經驗的機率爲

$$C_3^5\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^2+C_4^5\left(\frac{2}{5}\right)^4\left(\frac{3}{5}\right)+C_5^5\left(\frac{2}{5}\right)^5=\frac{720}{3125}+\frac{240}{3125}+\frac{32}{3125}=\frac{992}{3125}$$

例題 10

隨機變數 X 是參數為（6，$\frac{2}{5}$）的二項分配，X 的期望值為 μ，標準差為 σ，則

$P(\{\mu-2\sigma\leq X\leq\mu+2\sigma\})=$________。

解：$\mu=6\times\frac{2}{5}=\frac{12}{5}$

$$\sigma=\sqrt{6\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}}=\frac{6}{5}$$

$$\therefore P(\{\mu-2\sigma\leqq X\leqq\mu+2\sigma\})$$

$$=P(\{0\leqq X\leqq\frac{24}{5}\})$$

$$=1-P(\{X=5\})-P(\{X=6\})$$

$$=1-C_{5}^{6}(\frac{2}{5})^{5}(\frac{3}{5})^{1}-C_{6}^{6}(\frac{2}{5})^{6}$$

$$=1-\frac{576}{15625}-\frac{64}{15625}$$

$$=\frac{14985}{15625}=\frac{2997}{3125}$$