1-1　條件機率

例題 1

某迷你國小全校只有 60 位學生，其中男生有 25 位，女生有 35 位，男生中血型為 O 型者有 12 人，女生中血型為 O 型者有 8 人，今由全校學生中任意選取 1 人，以 B 表選得男生的事件，以 G 表選得女生的事件，以 O 表選得血型為 O 型之學生的事件，則：

(1) $P(O)=$________.

(2) $P(O\mid G)=$________，$P(G\mid O)=$________.

解：(1) 全校學生中，血型為 O 型者，共有 $12+8=20$（人）

所以由全校學生中任選 1 人，得血型為 O 型者之機率 $P(O)=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$

(2) $P(O\mid G)=\frac{n(O\cap G)}{n(G)}=\frac{8}{35}$

$P(G\mid O)=\frac{n(O\cap G)}{n(O)}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$

例題 2

設 A，B 為兩事件，若 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{3}$，$P(A\cup B)=\frac{7}{12}$，則下列各選項中哪些是正確的？ (A) $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$ (B) $P(A\mid B)=\frac{3}{4}$ (C) $P(B\mid A)=\frac{3}{4}$

(D) $P(A'\mid B')=\frac{5}{6}$ (E) $P(B'\mid A')=\frac{5}{6}$.

解：(A) ○：$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{7}{12}=\frac{6+4-7}{12}$

$=\frac{1}{4}$

(B) ○：$P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{4}$

(C) ╳：$P(B\mid A)=\dfrac{P(B\cap A)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$

(D) ╳：$P(A'\mid B')=\dfrac{P(A'\cap B')}{P(B')}=\dfrac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}=\dfrac{1-\frac{7}{12}}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}}=\dfrac{5}{8}$

(E) ○：$P(B'\mid A')=\dfrac{P(B'\cap A')}{P(A')}=\dfrac{1-P(A\cup B)}{1-P(A)}=\dfrac{1-\frac{7}{12}}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{5}{12}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{5}{6}$

故選(A)(B)(E)

例題 3

一袋中有 3 個白球，4 個紅球，5 個黑球，今自袋中依次共取出 3 個球不放回，

若每一次取球時，每一球被取到的機會均等，則：

(1) 這三球皆為異色球的機率為________.

(2) 在第三次取出者為黑球的機率為________.

解：(1) 三球異色之機率

＝（白、紅、黑）＋（白、黑、紅）＋（紅、白、黑）＋（紅、黑、白）＋（黑、白、紅）＋（黑、紅、白）

$=\left(\frac{3}{12}\times\frac{4}{11}\times\frac{5}{10}\right)+\left(\frac{3}{12}\times\frac{5}{11}\times\frac{4}{10}\right)+\left(\frac{4}{12}\times\frac{3}{11}\times\frac{5}{10}\right)+\left(\frac{4}{12}\times\frac{5}{11}\times\frac{3}{10}\right)+\left(\frac{5}{12}\times\frac{3}{11}\times\frac{4}{10}\right)+\left(\frac{5}{12}\times\frac{4}{11}\times\frac{3}{10}\right)$

$=\frac{5\times4\times3}{12\times11\times10}\times6=\frac{3}{11}$

(2) 第三次取出黑球之機率

＝（非黑、非黑、黑）＋（非黑、黑、黑）＋（黑、非黑、黑）＋（黑、黑、黑）

$$=\frac{7}{12}\times\frac{6}{11}\times\frac{5}{10}+\frac{7}{12}\times\frac{5}{11}\times\frac{4}{10}+\frac{5}{12}\times\frac{7}{11}\times\frac{4}{10}+\frac{5}{12}\times\frac{4}{11}\times\frac{3}{10}=\frac{5}{12}$$

例題 4

袋中有 12 個球，其中 5 個是白的，今由其中每次取出一球，連取二次（取出後不放回），則：

(1) 二次皆為白球之機率為________。

(2) 已知第一次為白球，問第二次取球，得白球之機率為________。

(3) 已知第二次為白球，問第一次取球，得白球之機率為________。

解：(1) 二次皆爲白球之機率爲 $\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}=\frac{5}{33}$

(2) 得白球後，袋中剩 11 球，其中白球 4 個，所求機率爲 $\frac{4}{11}$

(3) 以 W_i 表第 i 次得白球之事件，則

$$P(W_2)=\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}+\frac{7}{12}\cdot\frac{5}{11}=\frac{5\cdot 11}{12\cdot 11}=\frac{5}{12}$$

$$P(W_1\cap W_2)=\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}=\frac{5}{33}$$

故 $P(W_1\mid W_2)=\dfrac{P(W_1\cap W_2)}{P(W_2)}=\dfrac{\frac{5}{33}}{\frac{5}{12}}=\dfrac{4}{11}$

例題 5

甲袋中有 5 紅球，3 白球，乙袋中有 2 紅球，6 白球，若選袋及選球之機會均等，試問：

(1) 任選一袋且任選一球，得白球之機率為________。

(2) 任選一球為甲袋之白球的機率為________。

(3) 任選一球，在選中白球之情況，其來自甲袋的機率為________。

解：(1) $P(W)=P(甲)P(W\mid 甲)+P(乙)P(W\mid 乙)$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{6}{8}=\frac{3}{16}+\frac{6}{16}=\frac{9}{16}$$

(2) $P(甲\cap W)=P(甲)\,P(W\mid 甲)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{16}$

(3) $P(甲\mid W)=\dfrac{P(甲\cap W)}{P(W)}=\dfrac{\frac{3}{16}}{\frac{9}{16}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

例題 6

醫療主管機關在持續追蹤某傳染病多年後，發現如果體檢受檢人感染該傳染病，就一定可以檢測出來。但是卻有 4 %的機率，將一不患該傳染病之受檢者誤檢為患有該病。已知全部男性人口中有 0.2 %的機率患有此病。現在兵役體檢時進行檢測，若該梯次役男共有十萬人受檢，而且某役男被告知患有該病。請問下列哪些敘述為真？ (A)該役男確實染病的機率大於 3 % (B)該役男確實染病的機率大於 4 % (C)該役男確實染病的機率大於 5 % (D)該役男確實染病的機率大於 90 %。

解：畫樹形圖

患有疾病：0.2 % —— 檢測出來患有疾病 100 %

不患有疾病：99.8 % —— 檢測出來患有疾病 4 %

—— 檢測出來沒有疾病 96 %

∴該役男被告知患有疾病而確實染病的機率為

$$\frac{0.2\,\%\times 100\,\%}{0.2\,\%\times 100\,\%+99.8\,\%\times 4\,\%}=\frac{20}{419.2}\approx 4.77\,\%$$

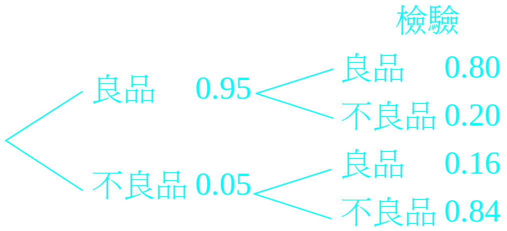
故選(A)(B)

例題 7

根據過去紀錄知，某電腦工廠檢驗其產品的過程中，將良品檢驗為不良品的機率為 0.20，將不良品檢驗為良品的機率為 0.16。又知該產品中，不良品占 5 %，良品占 95 %。若一件產品被檢驗為良品，但該產品實際上為不良品之機率為________。

（小數點後第三位四捨五入）

解：由題意可作樹形圖如下：



⇨ P（檢驗爲良品）$=0.95\times0.8+0.05\times0.16=0.768$

故 P（實際爲不良品｜檢驗爲良品）$=\dfrac{0.05\times0.16}{0.95\times0.8+0.05\times0.16}=\dfrac{0.008}{0.768}\approx$

$0.0104\approx0.01$

例題 8

設工廠由甲、乙、丙三部機器製造某一產品，其產量依次各占總量的 50 %，30 %，

20 %。依照過去的經驗，甲、乙、丙不良品的比率分別為 3 %，x %，5 %。今任選一

產品，若此產品為不良品，而此產品由乙所製造的機率為 $\dfrac{12}{37}$，則乙機器產不良品的

機率為________。

解：設 A 表不良品的事件，則

$P(A)=P(甲)P(A\mid 甲)+P(乙)P(A\mid 乙)+P(丙)P(A\mid 丙)$

$=50\,\%\times3\,\%+30\,\%\times x\,\%+20\,\%\times5\,\%=\dfrac{150+30x+100}{10000}=\dfrac{250+30x}{10000}$

由題意知 $P(乙\mid A)=\dfrac{12}{37}=\dfrac{P(乙)P(A\mid 乙)}{P(A)}=\dfrac{\dfrac{30x}{10000}}{\dfrac{250+30x}{10000}}=\dfrac{30x}{250+30x}$

⇨ $12(250+30x)=37\times30x$ ⇨ $x=4$

故得由乙機器產不良品的機率爲 4 %

例題 9

甲說實話的機率為 $\dfrac{8}{10}$，乙說實話的機率為 $\dfrac{9}{10}$，今有一袋內藏 3 白球，7 黑球，自袋

中任取一球，則：

(1) 甲、乙均說白球的機率為________。

(2) 若甲、乙二人均說白球，且此球確為白球的機率為________。

解：(1) P（甲、乙均說白球）

$=P$（拿白球且甲、乙均說白球）$+P$（拿黑球且甲、乙均說白球）

$$=\frac{3}{10}\times\frac{8}{10}\times\frac{9}{10}+\frac{7}{10}\times\frac{2}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{230}{1000}=\frac{23}{100}$$

(2) P（確爲白球｜說白球）

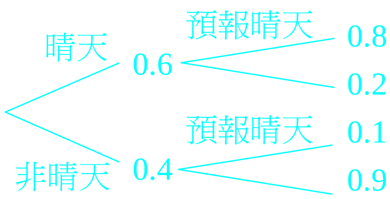
$$=\frac{P(\text{確爲白球}\cap\text{說白球})}{P(\text{說白球})}$$

$$=\frac{\frac{3}{10}\times\frac{8}{10}\times\frac{9}{10}}{\frac{230}{1000}}=\frac{\frac{216}{1000}}{\frac{230}{1000}}=\frac{216}{230}=\frac{108}{115}$$

例題 10

某地區之天氣，依多年統計得知，每年晴天占了 60 %，非晴天占了 40 %，又天氣預報可能不完全準確，將晴天說成晴天之機率為 0.8，將非晴天說成晴天之機率為 0.1，試問若天氣預報說明天是晴天，則明天確為晴天之機率為________。

解：由題意作樹形圖如下



設 A 表確實爲晴天的事件，B 表預報爲晴天的事件，則

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.6\times0.8}{0.6\times0.8+0.4\times0.1}=\frac{48}{52}=\frac{12}{13}$$

例題 11

設 A，B，C 為同一樣本空間的三事件，且 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(A\cup B)=\frac{7}{12}$，

(1) 若 A，B 為互斥事件，則 $P(B)=$________。

(2) 若 A，B 為獨立事件，則 $P(B)=$________。

(3) 若 A 是 B 的部分集合，則 $P(B)=$________。

解：(1) $\because A$，B 爲互斥事件　$\therefore A\cap B=\varnothing \Rightarrow P(A\cap B)=0$

由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow \frac{7}{12}=\frac{1}{2}+P(B)-0 \Rightarrow P(B)=\frac{1}{12}$

(2) $\because A$，B 爲獨立事件　$\therefore P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$\Rightarrow \frac{7}{12}=\frac{1}{2}+P(B)-\frac{1}{2}\times P(B) \Rightarrow \frac{1}{2}\times P(B)=\frac{1}{12} \Rightarrow P(B)=\frac{1}{6}$

(3) $\because A$ 是 B 的部分集合 $\Rightarrow A\subset B \Rightarrow A\cup B=B$

故 $P(B)=P(A\cup B)=\frac{7}{12}$

例題 12

設 A，B 為兩獨立事件，若 $P(A'\mid B)=\frac{3}{4}$，$P(A'\cap B)=\frac{1}{4}$，則：

(1) $P(A)=$________。

(2) $P(B)=$________。

(3) $P(A\cup B)=$________。

解：(1) $\because A$，B 爲獨立事件　$\therefore A'$，B 爲獨立事件

$\Rightarrow P(A'\mid B)=P(A')=1-P(A)=\frac{3}{4} \Rightarrow P(A)=\frac{1}{4}$

(2) $P(A'\cap B)=P(A')\times P(B) \Rightarrow \frac{3}{4}\times P(B)=\frac{1}{4} \Rightarrow P(B)=\frac{1}{3}$

(3) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

例題 13

A，B，C 三人，平常射擊之命中率為 $\frac{4}{5}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{2}{3}$，今有一鳥飛入射程內，三人同時各對它發射一槍（命中率互不影響），則：

(1) 此鳥恰中一槍之機率為________。

(2) 此鳥被命中之機率為________。

(3) 若已知此鳥恰中一槍，其為 A 擊中之機率為________。

解：令 E_1 表鳥恰中一槍之事件

由題意知 $P(A)=\frac{4}{5}$，$P(B)=\frac{3}{4}$，$P(C)=\frac{2}{3}$

⇨ $P(A')=\frac{1}{5}$，$P(B')=\frac{1}{4}$，$P(C')=\frac{1}{3}$

又 A，B，C 為獨立事件

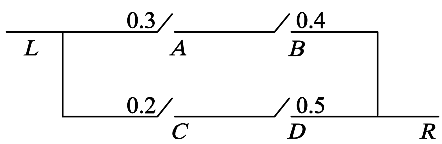
(1) $P(E_1)=P(A\cap B'\cap C')+P(A'\cap B\cap C')+P(A'\cap B'\cap C)$

$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{9}{60}=\frac{3}{20}$$

(2) $P(A\cup B\cup C)=1-P(A')\cdot P(B')\cdot P(C')=1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{59}{60}$

(3) $P(A\mid E_1)=\dfrac{P(A\cap E_1)}{P(E_1)}=\dfrac{P(A\cap B'\cap C')}{P(E_1)}=\dfrac{\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{3}{20}}=\frac{4}{9}$

例題 14



在右圖的電路圖中有四個開關，以 A，B，C，D 表示。電流通過各開關的機率分別為 0.3，0.4，0.2，0.5（如右圖所示），若各開關的操作獨立，則電流從左端 L 流到右端 R 的機率為________。

解：∵A，B，C，D 各開關均獨立操作

所求為 $P((A\cap B)\cup(C\cap D))$

$$=P(A\cap B)+P(C\cap D)-P(A\cap B\cap C\cap D)$$

$$=P(A)\cdot P(B)+P(C)\cdot P(D)-P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)\cdot P(D)$$

$$=0.3\times0.4+0.2\times0.5-0.3\times0.4\times0.2\times0.5$$

$$=0.12+0.1-0.012=0.208$$

例題 15

甲、乙、丙三人擲一銀幣遊戲，先擲得正面者為勝，若依甲、乙、丙、甲、乙、丙、……之次序輪流擲之，則：

(1) 甲得勝的機率為________。 (2) 乙得勝的機率為________。

(3) 丙得勝的機率為________。

解：

(1) $P(\text{甲勝})=\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^4+(\frac{1}{2})^7+\cdots\cdots=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{4}{7}$

(2) $P(\text{乙勝})=(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^5+(\frac{1}{2})^8+\cdots\cdots=\dfrac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{2}{7}$

(3) $P(\text{丙勝})=(\frac{1}{2})^3+(\frac{1}{2})^6+(\frac{1}{2})^9+\cdots\cdots=\dfrac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{1}{7}$

例題 16

有一射手平均 5 發可命中 2 發，則：

(1) n 發皆不命中的機率為________。

(2) 又若該射手最少命中 1 發的機率大於 0.999 時，至少要射________發。(每發均為獨立事件)

解：(1) 射手每射一發，命中的機率爲 $\frac{2}{5}$，不命中的機率爲 $\frac{3}{5}$

射手連射 n 發，皆不命中的機率爲 $\underbrace{\frac{3}{5}}_{\text{第一次不中}}\cdot\underbrace{\frac{3}{5}}_{\text{第二次不中}}\cdot\underbrace{\frac{3}{5}}_{\text{第三次不中}}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{3}{5}=\left(\frac{3}{5}\right)^n$

(2) 在 n 次射擊中至少命中一發的機率爲 $1-\left(\frac{3}{5}\right)^n$

$\therefore 1-\left(\frac{3}{5}\right)^n>0.999 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^n<0.001$

$\Rightarrow n(\log 3-\log 5)<-3 \Rightarrow n(0.4771-0.6990)<-3$

$\Rightarrow n\times(-0.2219)<-3 \Rightarrow n>\dfrac{-3}{-0.2219}\approx 13.5$，但 $n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow$ n 之最小値爲 14，故至少要射 14 發