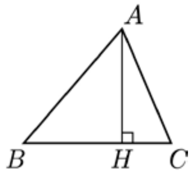
高雄市明誠中學 高三數學平時測驗 日期：100.12.15					
範圍	第 8 回平面向量	班級	三年　　班	姓名	
		座號			

一、填充題(每題 10 分)

1、 $\triangle ABC$ 中, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{b}$, $\overline{AH}$ 垂直 $\overline{BC}$ 於 H,若 $\overrightarrow{AH}=\alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b}$ 且 $|\overrightarrow{a}|=\sqrt{3}$, $|\overrightarrow{b}|=\sqrt{2}$, $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=1$,則 $\alpha=$______, $\beta=$______.



答案：$\frac{1}{3},\frac{2}{3}$

解析：$\because \overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AH}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=0\Rightarrow(\alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})=0$

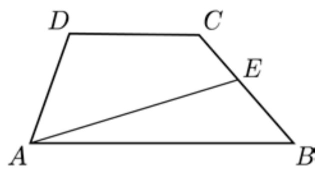
$\Rightarrow -\alpha|\overrightarrow{a}|^2+(\alpha-\beta)\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\beta|\overrightarrow{b}|^2=0$

$\Rightarrow -3\alpha+\alpha-\beta+2\beta=0\Rightarrow\beta=2\alpha\cdots\cdots$①,

又 $\overrightarrow{AH}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ 且 B, H, C 共線, $\therefore \alpha+\beta=1\cdots\cdots$②,

由①②得 $\alpha=\frac{1}{3},\beta=\frac{2}{3}$.

2、 梯形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$,E 在 $\overline{BC}$ 上且 $2\overline{BE}=3\overline{CE}$,若 $\overrightarrow{AE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$,則 $(x,y)=$______.



答案：$(\frac{7}{10},\frac{3}{5})$

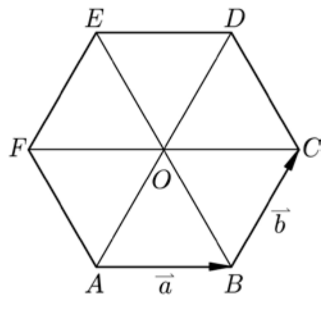
解析：$\because \overline{BE}:\overline{CE}=3:2$,

$\therefore \overrightarrow{AE}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})$

$=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})=\frac{7}{10}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AD}$

$\therefore (x,y)=(\frac{7}{10},\frac{3}{5})$.

3、 邊長為 1 的正六邊形 $ABCDEF$ 中, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{b}$



(1)若 $\overrightarrow{BE}=x\overrightarrow{a}+y\overrightarrow{b}$,則 $(x,y)=$______.

(2)若 $\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{a}+\beta\overrightarrow{b}$,則 $(\alpha,\beta)=$______.

(3) $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}=$______.

答案：(1) $(-2,2)$　(2) $(-1,2)$　(3)3

解析：如圖, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{b}=\overrightarrow{AO}$,則 $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}$.

(1) $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{BO}=2(\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a})=-2\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$ ，∴ $(x,y)=(-2,2)$.

(2) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=-\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}$ ，∴ $(\alpha,\beta)=(-1,2)$.

(3)∵ $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 之夾角爲 $60°$,∴ $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos 60°=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BE}=(-\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b})\cdot(-2\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b})=2|\overrightarrow{a}|^2-6\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+4|\overrightarrow{b}|^2=2-3+4=3$.

4、 已知平面上一點 P 及△ABC,若滿足 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$,則 P 點是△ABC 之______心.

答案：垂

解析：∵ $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ ，∴ $\overrightarrow{PB}\cdot(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC})=0\Rightarrow\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$ ， ∴ $\overrightarrow{PB}\perp\overrightarrow{CA}$……①,

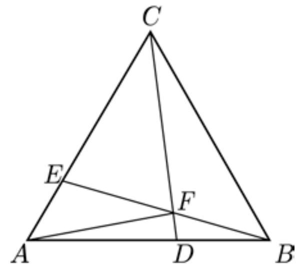
又 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}\Rightarrow\overrightarrow{PC}\cdot(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA})=0\Rightarrow\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ ， ∴ $\overrightarrow{PC}\perp\overrightarrow{AB}$……②,

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}\Rightarrow\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC})=0\Rightarrow\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$,∴ $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{CB}$……③,

由①②③知 P 爲△ABC 之垂心.

5、 △ABC 中,D 在 $\overline{AB}$ 上,E 在 $\overline{AC}$ 上，且 $\overline{AD}:\overline{DB}=3:2$, $\overline{AE}:\overline{EC}=2:5$, $\overline{CD}$ 交 $\overline{BE}$ 於 F,若

$\overrightarrow{AF}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$,則 $(\alpha,\beta)=$______.



答案：$(\frac{15}{29},\frac{4}{29})$

解析：$\overrightarrow{AF}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}+\frac{7}{2}\beta\overrightarrow{AE}$,

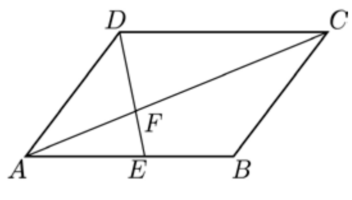
∵E, F, B 共線, ∴ $\alpha+\frac{7}{2}\beta=1$……①,

又 $\overrightarrow{AF}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}=\frac{5}{3}\alpha\overrightarrow{AD}+\beta\overrightarrow{AC}$,

∵D, F, C 共線, ∴ $\frac{5}{3}\alpha+\beta=1$……②,

由①②得 $\alpha=\frac{15}{29},\beta=\frac{4}{29}$.

6、 平行四邊形 $ABCD$ 中,E 在 $\overline{AB}$ 上且 $3\overline{AE}=4\overline{BE}$, $\overline{DE}$ 交 $\overline{AC}$ 於 F,若 $\overrightarrow{AF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$,則 $(x,y)=$ ______.

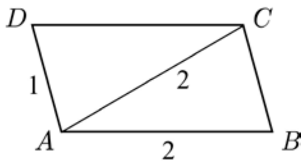


答案：$(\frac{4}{11},\frac{4}{11})$

解析：$3\overline{AE}=4\overline{BE}$ 且 $\Delta DFC\sim\Delta EFA\Rightarrow\frac{\overline{CD}}{\overline{AE}}=\frac{7}{4}$

如圖, $\overrightarrow{AF}=\frac{7}{11}\overrightarrow{AE}+\frac{4}{11}\overrightarrow{AD}=\frac{7}{11}(\frac{4}{7}\overrightarrow{AB})+\frac{4}{11}\overrightarrow{AD}=\frac{4}{11}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{11}\overrightarrow{AD}$

7、 平行四邊形 $ABCD$ 中, $\overline{AB}=2,\overline{AD}=1,\overline{AC}=2$,則此平行四邊形 $ABCD$ 之面積=______.



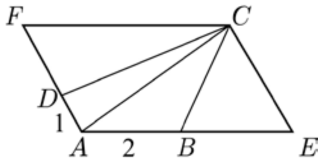
答案：$\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

解析：$\because \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\Rightarrow|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2\Rightarrow 4+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+1=4$, $\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=-\dfrac{1}{2}$,

$$\Rightarrow \square\ ABCD\text{之面積}=\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AD}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD})^2}=\sqrt{4\times1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{15}}{2}.$$

8、 四邊形 $ABCD$ 中, $\angle A=120^\circ$, $\overline{AB}=2,\overline{AD}=1$,且 $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}$,

則(1) $\overline{AC}$ 長=______. (2)四邊形 $ABCD$ 之面積=______.



答案：(1) $\sqrt{13}$ (2) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

解析：$\because \overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}$,如圖，則▱ $AECF$ 爲一平行四邊形.

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|\cos120^\circ=2\times1\times(-\dfrac{1}{2})=-1$,

$\therefore |\overrightarrow{AC}|^2=|2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}|^2=4|\overrightarrow{AB}|^2+12\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+9|\overrightarrow{AD}|^2=16-12+9=13$, $\therefore \overline{AC}=\sqrt{13}$.

(2) $\because$ ▱ $AECF$ 之面積 $=2\overline{AB}\times3\overline{AD}\times\sin120^\circ=2\times2\times3\times1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$,

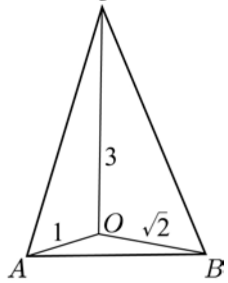
$\therefore$四邊形 $ABCD$ 之面積=▱ $AECF$面積 $-\Delta BCE$面積 $-\Delta DCF$面積

$$=6\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times2\times3\times\sin60^\circ-\frac{1}{2}\times4\times2\times\sin60^\circ$$

$$=6\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{3}}{2}-2\sqrt{3}=\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

9、 $\triangle ABC$ 中, $\overline{OA}=1,\overline{OB}=\sqrt{2},\overline{OC}=3$,若 $3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$,則$\triangle ABC$ 之面積=______.

答案：$\sqrt{14}$



解析：$\because |3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}|^2=|-\overrightarrow{OC}|^2$,

$\therefore 9|\overrightarrow{OA}|^2+12\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+4|\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2\Rightarrow 9+12\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+8=9\Rightarrow\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-\dfrac{2}{3}$,

$\therefore \triangle OAB$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{1\times2-\dfrac{4}{9}}=\dfrac{\sqrt{14}}{6}$,

同理, $|2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|^2=|-3\overrightarrow{OA}|^2\Rightarrow 8+4\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+9=9\Rightarrow\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=-2$,

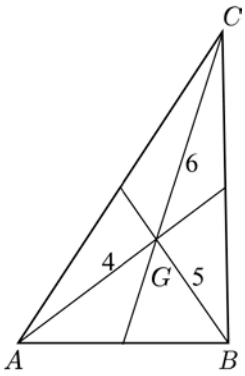
$\therefore \triangle OBC$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\sqrt{2\times9-4}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$,

$|3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}|^2=|-2\overrightarrow{OB}|^2 \Rightarrow 9+6\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+9=8 \Rightarrow \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=-\frac{5}{3}$,

$\therefore \triangle OCA$ 面積 $=\frac{1}{2}\sqrt{9\times1-\frac{25}{9}}=\frac{\sqrt{14}}{3}$,

故$\triangle ABC$ 面積 $=\triangle OAB$ 面積 $+\triangle OBC$ 面積 $+\triangle OCA$ 面積 $=\frac{\sqrt{14}}{6}+\frac{\sqrt{14}}{2}+\frac{\sqrt{14}}{3}=\sqrt{14}$.

10、設 G 爲$\triangle ABC$ 之重心, $\overline{GA}=4, \overline{GB}=5, \overline{GC}=6$,則



(1) $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=$______.　(2)$\triangle ABC$ 之面積 $=$______.

答案：(1) $-\frac{5}{2}$　(2) $\frac{45\sqrt{7}}{4}$

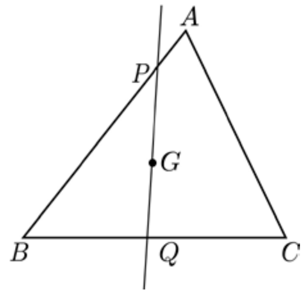
解析：(1) $\because G$ 爲$\triangle ABC$ 之重心, $\therefore \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=-\overrightarrow{GC} \Rightarrow |\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}|^2=|-\overrightarrow{GC}|^2$

$\Rightarrow 16+2\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}+25=36 \Rightarrow \overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=-\frac{5}{2}$.

(2)$\triangle ABC$ 面積 $=3\triangle GAB$ 面積 $=3\cdot\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{GA}|^2|\overrightarrow{GB}|^2-(\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB})^2}=\frac{3}{2}\sqrt{16\times25-\frac{25}{4}}=\frac{45\sqrt{7}}{4}$.

11、過$\triangle ABC$ 之重心 G 的一直線與 $\overline{AB}, \overline{BC}$ 邊分別交於 P, Q,且 $\overline{AP}:\overline{PB}=1:5$,則 $\overline{BQ}:\overline{QC}=$_____.



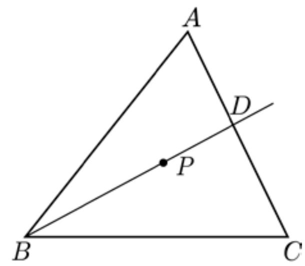
答案：5 : 4

解析：設 $\overrightarrow{BC}=t\overrightarrow{BQ}$, $\because G$ 爲$\triangle ABC$ 之重心,

$\therefore \overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{5}\overrightarrow{BP}+\frac{t}{3}\overrightarrow{BQ}=\frac{2}{5}\overrightarrow{BP}+\frac{t}{3}\overrightarrow{BQ}$,

又 P,G,Q 共線, $\therefore \frac{2}{5}+\frac{t}{3}=1 \Rightarrow t=\frac{9}{5}$, $\overrightarrow{BC}=\frac{9}{5}\overrightarrow{BQ} \Rightarrow \overrightarrow{BQ}=\frac{5}{9}\overrightarrow{BC}$,故 $\overline{BQ}:\overline{QC}=5:4$.

12、設$\triangle ABC$ 內部一點 P 滿足 $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=7\overrightarrow{PB}+9\overrightarrow{PC}$,若直線 AP 交 $\overline{BC}$ 於 D, $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$,則 $(x,y)=$______.



答案：$(\frac{4}{11},\frac{7}{11})$

解析： $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=7\overrightarrow{PB}+9\overrightarrow{PC}=7(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+9(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})$

$\Rightarrow 16\overrightarrow{AP}=4\overrightarrow{AB}+7\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{7}{16}\overrightarrow{AC}$,

設 $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AP} \Rightarrow \overrightarrow{AD}=\frac{k}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{7k}{16}\overrightarrow{AC}$,

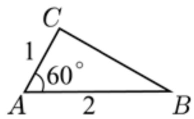
又 B, D, C 共線, $\therefore \frac{k}{4}+\frac{7k}{16}=1 \Rightarrow k=\frac{16}{11}$, $\overrightarrow{AD}=\frac{4}{11}\overrightarrow{AB}+\frac{7}{11}\overrightarrow{AC}$, $x=\frac{4}{11}, y=\frac{7}{11}$.

13、設 A, B, C 爲不共線三點，點 P 滿足 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$,已知 $\overline{AB}=2, \overline{AC}=1, \angle BAC=60°$.

若滿足(1) $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ 且 $x+y=1$ 時，則 P 之軌跡長度=______.

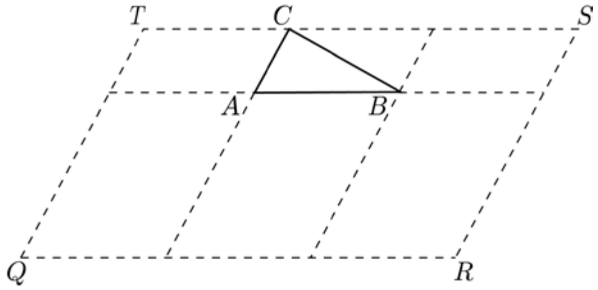
(2) $-1 \le x \le 2, -3 \le y \le 1$,則所有 P 點所在之區域面積=______.

答案：(1) $\sqrt{3}$ (2) $12\sqrt{3}$



解析：(1)令 P 之軌跡爲 $\overline{BC}$, $\overline{BC}^2=2^2+1^2-2\cdot 2\cdot 1\cos 60°=3 \Rightarrow \overline{BC}=\sqrt{3}$.

(2) P 之軌跡圖形如下圖平行四邊形 $QRST$.



面積 $=24\triangle ABC$ 面積 $=24\times\frac{1}{2}\times 2\times 1\times\sin 60° = 12\sqrt{3}$.

14、設△OAB 是邊長爲 2 的正三角形，在 $\overline{AB}$ 上有三點 P, Q, R 使 $\overline{AP}=\overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{RB}$，則 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}=$ ______。

答案：$\frac{11}{4}$

解析：$\because \overline{AP}=\overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{RB} \Rightarrow$ $\overrightarrow{OP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$,

又 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$ $\therefore \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}=\frac{3}{16}|\overrightarrow{OA}|^2+\frac{3}{16}|\overrightarrow{OB}|^2+\frac{10}{16}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\frac{11}{4}$

15、設 $\overrightarrow{a}=(1,1), \overrightarrow{b}=(2,6)$, t 爲實數，則 $|t\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|$ 之最小值=______,此時 $t=$______.

答案：$2\sqrt{2}, -4$

解析：$|t\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=|t(1,1)+(2,6)|=|(t+2, t+6)|$

$$=\sqrt{(t+2)^2+(t+6)^2}=\sqrt{2t^2+16t+40}=\sqrt{2(t+4)^2+8}\ge 2\sqrt{2},$$

$\therefore$ 當 $t=-4$ 時，有最小值 $2\sqrt{2}$.

16、設 $\overrightarrow{a}=(-4,3), \overrightarrow{b}=(2,-1)$, 若 $(\overrightarrow{a}+r\overrightarrow{b})//((1+r)\overrightarrow{a}-2r\overrightarrow{b})$,則 $r=$______.

答案：0 或 -3

解析：$\because \overrightarrow{a}$ 不平行於 $\overrightarrow{b}$, $\frac{1}{1+r}=\frac{r}{-2r} \Rightarrow -2r=r+r^2 \Rightarrow r^2+3r=0 \Rightarrow r(r+3)=0$, $\therefore r=0$ 或 -3.

17、△ ABC 中，已知 $\overrightarrow{AB}=(3,4),\overrightarrow{BC}=(5,-12)$,則△ ABC 之周長＝______.

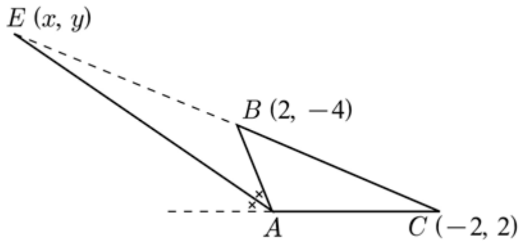
答案：$18+8\sqrt{2}$

解析：$|\overrightarrow{AB}|=5$, $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{25+144}=13$,

又 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(8,-8)$, $\therefore |\overrightarrow{AC}|=8\sqrt{2}$, ∴周長 $=5+13+8\sqrt{2}=18+8\sqrt{2}$.

18、設 $A(2,-1),B(2,-4),C(-2,2)$ 爲△ ABC 三頂點，若 $\angle A$ 之外角平分線交直線 BC 於 E ,則 E 點坐標爲______.

答案：$(8,-13)$



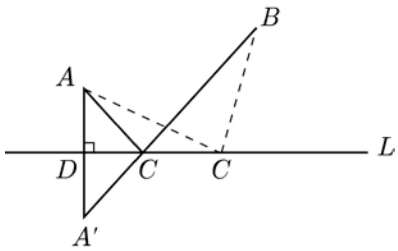
解析：$\overline{AB}=3,\overline{AC}=5$,

設 $E(x,y)$, $\because \dfrac{\overline{BE}}{\overline{CE}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{3}{5}$, $\therefore \dfrac{\overline{EB}}{\overline{BC}}=\dfrac{3}{2}$,

$\therefore (2,-4)=(\dfrac{2x-6}{5},\dfrac{2y+6}{5})$,故 $E(x,y)=(8,-13)$.

19、已知 $A(2,1),B(3,2),C(-1+t,1+t)$, t 爲實數,則△ ABC 之最小周長＝______,此時 C 點坐標爲__

答案：$\sqrt{2}+2\sqrt{5},(1,3)$



解析：∵點 $C(-1+t,1+t)$ 在直線 $L:x-y+2=0$ 上移動,

A,B 在 L 之同側，過 A 作與 L 垂直的直線 $L':x+y-3=0$,

$\therefore L$ 與 L' 交於 $D(\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{2})$,則 A 對 L 之對稱點 $A'(-1,4)$,

故直線 $A'B$ 方程式爲 $x+2y-7=0$,

$C(-1+t,1+t)$ 代入 $x+2y-7=0$ 得 $t=2$, $\therefore C(1,3)$,

∴△ ABC 之周長 $=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\sqrt{2}+\overline{BC}+\overline{CA'}\ge\sqrt{2}+\overline{BA'}=\sqrt{2}+2\sqrt{5}$,

即當 C 在 $(1,3)$ 處有最小周長 $\sqrt{2}+2\sqrt{5}$.

20、設 $A(2,3),B(-2,5)$ 兩點，若 $P(x,y)$ 在線段 AB 上移動.

(1)則 $2x+3y-4$ 之最大值＝______.(2)若點 $C(-6,2)$ 則 $\overline{PC}$ 之最小值＝______.

答案：(1)9 (2)5

解析：(1) $\because \overrightarrow{AB}=(-4,2)$, $\therefore \overline{AB}:\begin{cases}x=2-4t\\y=3+2t\end{cases}$, $0\le t\le 1$,

則 $2x+3y-4=2(2-4t)+3(3+2t)-4=-2t+9$,

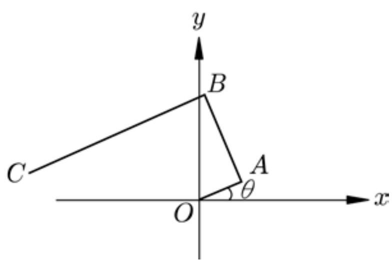
又 $0\le t\le 1$, ∴當 $t=0$ 時, $2x+3y-4=9$ 爲最大.

(2) $\because P(2-4t,3+2t),\ 0\le t\le 1$,

$\therefore \overline{PC}=\sqrt{(8-4t)^2+(1+2t)^2}=\sqrt{20t^2-60t+65}=\sqrt{20(t-\dfrac{3}{2})^2+20}$,

∴當 $t=1$ 時, $\overline{PC}=5$ 爲最小.

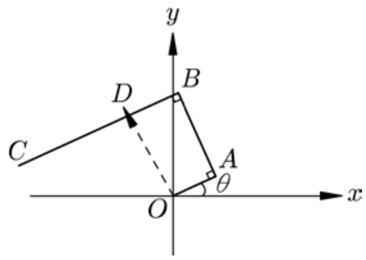
21、如圖，坐標平面上, $\overline{OA}=a,\overline{AB}=2a,\overline{BC}=4a$, $\overline{OA}$ 與 x 軸夾角爲 θ $0<\theta<90°$, $\angle OAB=\angle ABC=90°$,則



(1) $\overrightarrow{AB}=$______(以 a 及 θ 表示).

(2)若 C 點落在 x 軸上，則 $\tan\theta=$______.

(3)若 C 點坐標爲 $(-13,0)$,則 $a=$______.



答案：(1) $(-2a\sin\theta,2a\cos\theta)$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\sqrt{13}$

解析：(1)作向量 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AB}$,則 $\angle xOD=90°+\theta$,

又 $\overline{OD}=\overline{AB}=2a$,

$\therefore D(2a\cos(90°+\theta),2a\sin(90°+\theta))=(-2a\sin\theta,2a\cos\theta)$,

$\therefore \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OD}=(-2a\sin\theta,2a\cos\theta)$.

(2) $\because \overrightarrow{OA}=(a\cos\theta,a\sin\theta)$,又 $\overline{OA}//\overline{BC}\Rightarrow \overrightarrow{BC}=-4\overrightarrow{OA}=(-4a\cos\theta,-4a\sin\theta)$

$\Rightarrow \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(a\cos\theta,a\sin\theta)+(-2a\sin\theta,2a\cos\theta)+(-4a\cos\theta,-4a\sin\theta)$

$=(-2a\sin\theta-3a\cos\theta,2a\cos\theta-3a\sin\theta)$,

若 C 在 x 軸上，則 $2a\cos\theta-3a\sin\theta=0\Rightarrow 2a\cos\theta=3a\sin\theta$, $\therefore \tan\theta=\frac{2}{3}$.

(3)若 $C(-13,0)$,則 $\overrightarrow{OC}=(-13,0)$,

$\therefore -2a\sin\theta-3a\cos\theta=-13$, $\because \tan\theta=\frac{2}{3}\Rightarrow \sin\theta=\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{13}}$,

得 $\frac{-4a}{\sqrt{13}}-\frac{9a}{\sqrt{13}}=-13\Rightarrow a=\sqrt{13}$.

22、已知 $A(2,-2),B(-2,1)$,若▱ $ABCD$ 爲正方形，且 A,B,C,D 四點依逆時針排列，則

(1) C 點坐標爲______. (2) D 點坐標爲______.

答案：(1) $(-5,-3)$ (2) $(-1,-6)$

解析： $\overrightarrow{AB}=(-4,3)$, $\therefore \overrightarrow{BC}=\pm(3,4)$,$\because$逆時針, $\therefore$取 $\overrightarrow{BC}=(-3,-4)$.

(1) O 爲原點, $\therefore \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=(-2,1)+(-3,-4)=(-5,-3)\Rightarrow C(-5,-3)$.

(2) $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OC}+(-\overrightarrow{AB})=(-5,-3)+(4,-3)=(-1,-6)$, $\therefore D(-1,-6)$.

23、設 $|\overrightarrow{a}|=4,|\overrightarrow{b}|=2\sqrt{3},|\overrightarrow{c}|=2$ 且 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{0}$,則 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 之夾角=______.

答案：150°

解析： $\because |\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2=|-\overrightarrow{c}|^2$, $\therefore 16+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+12=4\Rightarrow \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-12$,

設 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 夾角 θ,則 $\cos\theta=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}=\frac{-12}{4\times2\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore \theta=150°$.

24、設 $\overrightarrow{AB}=(5,0),\overrightarrow{CD}=(-3,-4)$ 且 $\overrightarrow{BC}//\overrightarrow{DA},\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$,則 $\overrightarrow{BC}=$______.

答案：$(-3,6)$ 或 $(1,-2)$

解析：設 $\overrightarrow{BC}=(x,y)$,則 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(5,0)+(x,y)+(-3,-4)=(x+2,y-4)$,

$\because \overrightarrow{BC}//\overrightarrow{DA}$, $\therefore \dfrac{x}{x+2}=\dfrac{y}{y-4}\Rightarrow xy-4x=xy+2y\Rightarrow y=-2x\cdots\cdots①$,

又 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$,$\therefore(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=0$

$\Rightarrow(x+5,y)\cdot(x-3,y-4)=0\Rightarrow x^2+y^2+2x-4y-15=0\cdots\cdots②$,

①代入②得 $x^2+4x^2+2x+8x-15=0\Rightarrow x^2+2x-3=0\Rightarrow(x+3)(x-1)=0$,

$\therefore x=-3$ 或 1, $y=6$ 或 -2, $\therefore\overrightarrow{BC}=(-3,6)$ 或 $(1,-2)$.

25、設 $\overrightarrow{v}=(\sqrt{3},-1)$,則與 $\overrightarrow{v}$ 夾角爲 $60°$ 的單位向量爲______.

答案：$(0,-1)$ 或 $(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2})$

解析：設此單位向量 $\overrightarrow{u}=(x,y)\Rightarrow x^2+y^2=1\cdots\cdots①$,

$\because \overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 夾角爲 $60°$, $\therefore \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=|\overrightarrow{u}|\,|\overrightarrow{v}|\cos 60°\Rightarrow\sqrt{3}x-y=1\times2\times\dfrac{1}{2}=1\cdots\cdots②$,

由② $y=\sqrt{3}x-1$ 代入①得 $x^2+(\sqrt{3}x-1)^2=1\Rightarrow 4x^2-2\sqrt{3}x=0\Rightarrow 2x(2x-\sqrt{3})=0$,

$\therefore x=0$ 或 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $y=-1$ 或 $\dfrac{1}{2}$, $\therefore\overrightarrow{u}=(0,-1)$ 或 $(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2})$.

26、點 $A(2,3)$ 在直線 $L:3x-4y-19=0$ 上之(1)正射影點爲______. (2)對稱點爲______.

答案：(1) $(5,-1)$ (2) $(8,-5)$

解析：$\because L$ 過點 $(5,-1)$，法向量 $(3,-4)$，取方向向量 $(4,3)$,

$\therefore L:\begin{cases}x=5+4t\\y=-1+3t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$,設正射影點 $B(5+4t,-1+3t)$,

得 $\overrightarrow{AB}=(3+4t,3t-4)\perp(4,3)$,$\therefore 12+16t+9t-12=0\Rightarrow t=0$,故正射影點爲 $(5,-1)$,

設對稱點 $A'(a,b)$,則 $(\dfrac{a+2}{2},\dfrac{b+3}{2})=(5,-1)$,$\therefore$對稱點 $(a,b)=(8,-5)$.

27、設 $\overrightarrow{a}=(-2,1),\overrightarrow{b}=(3,4)$,則 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上之(1)投影量爲______. (2)正射影長=______.
(3)投影(正射影)爲______.

答案：(1) $-\dfrac{2}{5}$ (2) $\dfrac{2}{5}$ (3) $(\dfrac{-6}{25},\dfrac{-8}{25})$

解析：設 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 之夾角爲 θ ,則

(1) $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上之投影量爲 $|a|\cos\theta = |\overrightarrow{a}| \cdot \dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|} = \dfrac{-6+4}{5} = \dfrac{-2}{5}$.

(2) $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上之正射影長 $= |a||\cos\theta| = \dfrac{2}{5}$.

(3) $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上之投影爲 $(\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|^2})\overrightarrow{b} = \dfrac{-6+4}{25}(3,4) = (\dfrac{-6}{25},\dfrac{-8}{25})$.

28、二直線 $L_1:\begin{cases}x=-1+2t\\ y=5+t\end{cases}$, t 爲實數與 $L_2:\begin{cases}x=2-t\\ y=t\end{cases}$, t 爲實數，之夾角爲 θ,則 $\cos\theta$ 爲______.

答案：$\pm\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

解析：在 L_1, L_2 上各取方向向量 $\overrightarrow{v_1}=(2,1), \overrightarrow{v_2}=(-1,1)$,

$$\therefore \cos\theta = \pm\frac{\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}}{|\overrightarrow{v_1}|\,|\overrightarrow{v_2}|} = \pm\frac{-2+1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}} = \pm\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

29、過點 $A(1,2)$ 且與直線 $L:\sqrt{3}x-y+1=0$ 夾角爲 $30°$ 的直線方程式爲______.

答案：$x-\sqrt{3}y-1+2\sqrt{3}=0$ 或 $x=1$

解析：設所求直線斜率爲 m,則 $y-2=m(x-1) \Rightarrow mx-y-m+2=0$,

$$\therefore \cos 30° = \pm\frac{\sqrt{3}m+1}{2\cdot\sqrt{m^2+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 3m^2+2\sqrt{3}m+1 = 3(m^2+1) \Rightarrow m = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

故直線爲 $y-2=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x-1) \Rightarrow x-\sqrt{3}y-1+2\sqrt{3}=0$,

另一條直線斜率不存在，∴所求爲 $x=1$.

30、二直線 $L_1:2x-y+3=0$ 與 $L_2:x-2y+4=0$ 之交角的平分線方程式爲______.

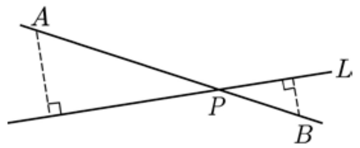
答案：$x+y-1=0$ 或 $3x-3y+7=0$

解析：設角平分線上任一點 $P(x,y)$, $\because d(P,L_1)=d(P,L_2)$

$$\therefore \left|\frac{2x-y+3}{\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{x-2y+4}{\sqrt{5}}\right| \Rightarrow 2x-y+3 = \pm(x-2y+4)$$,即 $x+y-1=0$ 或 $3x-3y+7=0$.

31、已知 $A(2,-1), B(-1,2)$ 兩點，若直線 $L:3x-4y+5=0$ 交 $\overline{AB}$ 於 P,

則 $\overline{AP}:\overline{BP}=$______.



答案：$5:2$

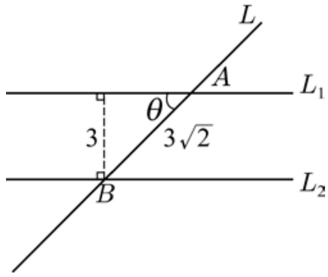
解析：如圖, $\because \overline{AP}:\overline{BP} = d(A,L):d(B,L)$

$$= \left|\frac{6+4+5}{5}\right| : \left|\frac{-3-8+5}{5}\right| = 3:\frac{6}{5} = 5:2.$$

32、設直線 L 過點 $P(1,-2)$ 且與直線 $L_1:3x+4y-7=0$, $L_2:3x+4y+8=0$ 分別交於 A,B 兩點，若

$\overline{AB}=3\sqrt{2}$,則 L 之方程式爲______.

答案： $x-7y-15=0$ 或 $7x+y-5=0$



解析： L_1 與 L_2 之距離 $=\left|\dfrac{-7-8}{5}\right|=3$,

如圖，設 L_1 與 L 之銳夾角爲 θ,則 $\sin\theta=\dfrac{3}{3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\theta=45°$.

設 L 之斜率爲 $m\Rightarrow L: y+2=m(x-1)$,即 $mx-y-m-2=0$,

$\therefore \cos 45°=\pm\dfrac{3m-4}{\sqrt{m^2+1}\cdot 5}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow 2(9m^2-24m+16)=25(m^2+1)$

$\Rightarrow 7m^2+48m-7=0\Rightarrow(7m-1)(m+7)=0\Rightarrow m=\dfrac{1}{7}$ 或 -7,

$\therefore L: y+2=\dfrac{1}{7}(x-1)$ 或 $y+2=-7(x-1)$， 即 $x-7y-15=0$ 或 $7x+y-5=0$.

33、設 x, y 爲實數, $\overrightarrow{a}=(x,-3)$, $\overrightarrow{b}=(2,y)$,若 $x^2+y^2=13$,則 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 之最大值爲______.

答案：13

解析： $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=2x-3y$,

又 $(2x-3y)^2\le(x^2+y^2)[2^2+(-3)^2]\Rightarrow(2x-3y)^2\le 13^2\Rightarrow -13\le 2x-3y\le 13$,

$\therefore$ $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 之最大值爲 13.