高雄市明誠中學 高三數學平時測驗 日期：100.10.20					
範圍	第二回數列級數	班級	三年 班	姓名	
		座號			

一、填充題（每題10分）

1、 數列$\langle a_n\rangle$的前 n 項和$S_n=3n^2+n$，則$a_n=$______。

答案：$a_n=6n-2, n\in\mathbb{N}$

解析：當$n=1$時，$a_1=S_1=3+1=4$

當$n\geq 2$時，$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(3n^2+n)-[3(n-1)^2+(n-1)]$

$=3(2n-1)+1=6n-2$ $\therefore a_n=\begin{cases}4 & \text{，當} n=1\\ 6n-2 & \text{，當} n\geq 2\end{cases}\Rightarrow a_n=6n-2, n\in\mathbb{N}$

2、 在數列$\langle a_n\rangle$中，已知$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=n(n+1)(n+2)$，求$\sum_{k=1}^{10}a_k=$______。

答案：195

解析：

$$\begin{array}{rl} & a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=n(n+1)(n+2)\\ -) & a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}=(n-1)n(n+1)\\ \hline & na_n=3n(n+1)\\ & a_n=3n+3\end{array}$$

原式$=\sum_{k=1}^{10}(3k+3)=3\sum_{k=1}^{10}k+30=3\cdot\frac{10\cdot 11}{2}+30=195$

3、 試求：$\frac{3}{1^2}+\frac{5}{1^2+2^2}+\frac{7}{1^2+2^2+3^2}+\cdots+\frac{2n+1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}=$________。

答案：$\frac{6n}{n+1}$

解析：原式$=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{1^2+2^2+\cdots+k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{k(k+1)}$

$=6\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=6\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})=6(\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1})=\frac{6n}{n+1}$

4、 一等比數列之首項為 1，公比為$\frac{1}{2}$，其首 n 項之和小於 1.999，而首$n+1$項之和大於 1.999，則$n=$______。

答案：10

解析：$S_n=\frac{1\cdot(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}\Rightarrow\begin{cases}2-\frac{1}{2^{n-1}}<1.999\\ 2-\frac{1}{2^n}>1.999\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2^{n-1}}>0.001\\ \frac{1}{2^n}<0.001\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2^{n-1}<1000\\ 2^n>1000\end{cases}\Rightarrow n=10$

5、 設二等差數列$\langle a_n\rangle,\langle b_n\rangle$，前 n 項的和各為A_n, B_n，若$a_n:b_n=2n+3:3n+4$，則$A_5:B_5=$

______。

答案：$9:13$

解析：$A_5:B_5=5a_{\frac{5+1}{2}}:5b_{\frac{5+1}{2}}=a_3:b_3=(2\times3+3):(3\times3+4)=9:13$

6、 設二等差數列$<a_n>,<b_n>$，前 n 項的和各爲 A_n,B_n，若 $A_n:B_n=(2n+3):(3n+4)$，則 $a_5:b_5=$ ______。

答案：$21:31$

解析：$a_5:b_5=9a_5:9b_5=A_9:B_9=2\times9+3:3\times9+4=21:31$

7、 一數列其前 n 項總和恆爲 $\frac{1}{n+1}$，則此數列的第 10 項 $a_{10}=$______。

答案：$-\frac{1}{110}$

解析：由題意：$S_n=\frac{1}{n+1}\Rightarrow a_n=S_n-S_{n-1},n\ge2=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{-1}{n(n+1)},n\ge2$，

所以 $a_n=\begin{cases}\frac{1}{2},\ 當n=1\\ \frac{-1}{n(n+1)},\ 當n\ge2\end{cases}$，　故 $a_{10}=-\frac{1}{10\cdot11}=-\frac{1}{110}$

8、 一等比數列之首 n 項和 $S_n=3\cdot2^n+x$，則實數 $x=$______。

答案：-3

解析：$a_n=S_n-S_{n-1}=(3\cdot2^n+x)-(3\cdot2^{n-1}+x)=\frac{3}{2}\cdot2^n,n\ge2$

又 $n=1$ 代入 $\Rightarrow a_1=S_1=3\cdot2^1+x=6+x$

此等比數列爲 $6+x,\ \ 6,\ \ 12,\cdots\Rightarrow\ \frac{6}{6+x}=\frac{12}{6}=$公比 $\Rightarrow36=72+12x\Rightarrow x=-3$

9、 一等差數列共 33 項，前 3 項之和爲 69，後 3 項之和爲 204，(1)求 $a_{32}=$___，(2)求首項 $=$____。

答案：$68,\ \frac{43}{2}$

解析：$a_{31}+a_{32}+a_{33}=204\Rightarrow(a_{31}+a_{33})+a_{32}=204\Rightarrow(2a_{32})+a_{32}=204\Rightarrow a_{32}=68$

同理 $a_1+a_2+a_3=69\Rightarrow a_2=23$

又 $a_{32}=a_2+(32-2)d$，故 $68=23+30d\Rightarrow d=\frac{3}{2}$，$a_1=a_2-d=23-\frac{3}{2}=\frac{43}{2}$

10、已知一等差數列，首項爲 12，且前 6 項之和與前 19 項之和相等，求此數列之公差爲______。

答案：-1

解析：$S_6=S_{19}\Rightarrow a_7+a_8+.......+a_{18}+a_{19}=0$，即 $13a_{13}=0,\ \ a_{13}=0$，則 $12+12d=0\Rightarrow d=-1$

11、等差數列，首項爲 130，公差 -6

(1)第 n 項起始爲負數，則 $n=$______。(2)加到第 n 項之和爲負數，則 n 之最小值爲______。

答案：(1)23　　(2)45

解析：(1) $a_n=130+(n-1)(-6)<0$

$6(n-1)>130 \Rightarrow n>\dfrac{136}{6}=22.\sim \Rightarrow n\geq 23$

(2) $S_n=\dfrac{n[2\times 130+(n-1)(-6)]}{2}<0 \Rightarrow 260-6(n-1)<0$

$6(n-1)>260 \Rightarrow n>\dfrac{266}{6}=44.\sim \Rightarrow n\geq 45$

12、有兩個等差數列 $<a_n>=<0,\ 7,\ 14,\ 21,\cdots,\cdot 994>$，$<b_n>=<1,\ 5,\ 9,\ 13,\ \ ,1001>$ 由這兩個數列中取出全部共同項，由小而大依序排列，得另一數列 $<c_n>$ 共有 k 項，則

(1)求 c_1 之值爲______，(2) $c_1+c_2+\cdots+c_k$ 之和 = ______。

答案：(1)21　(2)17395

解析：$<a_n>: 0, 7, 14, 21,\cdots\cdots$，公差 7

$<b_n>: 1, 5, 9, 13, 17,\ 21,\cdots\cdots$，公差 4

共同項 $<c_n>$ 的第一項爲 21，且公差爲 [7, 4] = 28，

$\therefore$ 末項爲 $c_{35}=21+34\times 28=97$；和 $=\dfrac{35(42+34\times 28)}{2}=17395$

13、將正奇數由小而大依下列方式分組 (1), (3), (5,7), (9,11), (13,15,17), (19,21,23),…，已知第 3 組中的第一個數爲 5，則

(1)第 21 組中的第一個數爲__________，(2)第 21 組內所有數的和爲______。

答案：(1)221　(2)2541

解析：各組個數分別爲：1,1,2,2,3,3,……..

故第 21 組中共有 11 個數，由第 1 組到第 20 組共有 $2(1+2+\cdots+10)=110$ 個數，

故第 21 組中的第一個數爲第 111 個奇數 $2\times 111-1=221$，

第 21 組中的所有數之和 $=\dfrac{11\times[2\times 221+(11-1)\times 2]}{2}=2541$

14、數列 $\dfrac{1}{1},\ \dfrac{2}{1},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{1},\ \dfrac{2}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{4}{1},\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{4},\ldots$，依此規則，令 a_n 表其第 n 項，

(1)若 $a_n=\dfrac{5}{14}$，則 $n=$____________。(2)試求 $a_{73}=$___________。

答案：167；$\dfrac{6}{7}$

解析：(1)：$(\dfrac{1}{1}), (\dfrac{2}{1},\ \dfrac{1}{2}), (\dfrac{3}{1},\ \dfrac{2}{2},\ \dfrac{1}{3}), (\dfrac{4}{1},\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{4}),\ldots$，

分子分母和爲 2 有 1 項，和爲 3 有 2 項，和爲 4 有 3 項，……..，和爲 18 有 17 項，……

$\dfrac{5}{14}$ 於(分子分母和爲 19)該組第 14 項 $\Rightarrow 1+2+3+.....+17+14=\dfrac{17(1+17)}{2}+14=167$

(2)：$1+2+3+.....+10+11=66$，a_{73} 爲(分子分母和爲 13)該組第 7 項 $\dfrac{6}{7}$

15、求$6+66+666+\cdots+\underbrace{666\cdots66}_{n個6}$之和爲________________。

$\boxed{答案}$：$\dfrac{2(10^{n+1}-9n-10)}{27}$

$\boxed{解析}$：$6+66+666+\cdots+\underbrace{666\cdots66}_{n個6}=\dfrac{6}{9}(9+99+999+\cdots+\underbrace{999\cdots99}_{n個9})$

$$=\frac{2}{3}[(10-1)+(10^2-1)+\cdots+(10^n-1)]$$

$$=\frac{2}{3}[(10+10^2+\cdots+10^n)-n]=\frac{2}{3}[\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n]=\frac{2(10^{n+1}-9n-10)}{27}$$ 。

16、求$\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n^2-2n+1}{n+1}-\dfrac{n^2+2n+5}{n+3})=$______。

$\boxed{答案}$：-2

$\boxed{解析}$：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2-2n+1)(n+3)-(n^2+2n+5)(n+1)}{(n+1)(n+3)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n^2-12n-2}{n^2+4n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2-\frac{12}{n}-\frac{2}{n^2}}{1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}=-2$$

17、求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\times2^n-4\times3^{n-1}}{6\times3^n+2^{n+1}}=$______。

$\boxed{答案}$：$-\dfrac{2}{9}$

$\boxed{解析}$：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\times(\frac{2}{3})^n-\frac{4}{3}}{6+2\cdot(\frac{2}{3})^n}=-\dfrac{4}{3}\times\dfrac{1}{6}=-\dfrac{2}{9}$

18、無窮級數$\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+n}+\cdots$的和爲______。

$\boxed{答案}$：2

$\boxed{解析}$：原式$=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+2+\cdots+k}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{2}{k(k+1)}=2\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1})=2\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{n+1})=2$

19、已知一無窮等比級數之總和爲 4，又知 5 其第二項爲-3，則其公比爲______。

$\boxed{答案}$：$-\dfrac{1}{2}$

$\boxed{解析}$：設首項a，公比r　$\therefore\begin{cases}\dfrac{a}{1-r}=4\\ ar=-3\end{cases}\Rightarrow 4(1-r)\cdot r=-3$

$$\Rightarrow 4r^2-4r-3=0\Rightarrow(2r-3)(2r+1)=0\Rightarrow r=\frac{3}{2}(不合)或r=-\frac{1}{2}$$

20、一正方形周長 10，以各邊中點爲頂點連成第二個正方形，再連各邊中點得第三個正方形，

依此類推。令 S_n 表前 n 個正方形周長總和，則(1) $S_n=$______ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=$______。

$\boxed{答案}$：(1) $10(2+\sqrt{2})[1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^n]$；(2) $10(2+\sqrt{2})$

$\boxed{解析}$：(1) $a_1=10$

$$a_2=10\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\vdots$$

$$a_n=10\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n-1}$$

$$\therefore S_n=10+10\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\cdots+10\cdot(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n-1}=\frac{10[1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^n]}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=10(2+\sqrt{2})[1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^n]$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}10(2+\sqrt{2})(1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^n)=10(2+\sqrt{2})$

21、設無窮等比級數 $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots$ 之和為 S，其前 n 項和為 S_n，則

(1) $S_n=$______ (2) $S=$______ (3)若 $\left|S-S_n\right|<\frac{1}{1000}$，求 n 之最小值。

$\boxed{答案}$：(1) $\frac{3}{2}[1-(\frac{1}{3})^n]$；(2) $\frac{3}{2}$；(3) 7

$\boxed{解析}$：(1) $S_n=\dfrac{1\cdot[1-(\frac{1}{3})^n]}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}[1-(\frac{1}{3})^n]$

(2) $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{2}$

(3) $\left|S-S_n\right|=\left|\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\cdot(\frac{1}{3})^n\right|<\frac{1}{1000}\Rightarrow 3^n>1500$

$\because 3^6=729, 3^7=2187\Rightarrow$ 最小之 n 值 $=7$

22、求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+1}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})=$______。

$\boxed{答案}$：$\frac{1}{2}$

$\boxed{解析}$：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+1}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})\cdot\dfrac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{1}{2}$

23、試求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n-1}+3^n+4^{n+1}}{5^{n-1}}=$______。

$\boxed{答案}$：$\frac{535}{6}$

$\boxed{\text{解析}}$：原式$=\sum_{n=1}^{\infty}[(\frac{2}{5})^{n-1}+5\cdot(\frac{3}{5})^{n}+4^{2}\cdot(\frac{4}{5})^{n-1}]=\frac{1}{1-\frac{2}{5}}+5\cdot\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}+16\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{5}}=\frac{5}{3}+\frac{15}{2}+80=\frac{535}{6}$

24、設 C_1 爲單位圓，T_1 爲 C_1 之內接正三角形，C_2 爲 T_1 之內切圓，T_2 爲 C_2 之內接正三角形，依此類推。令 a_i 表 T_i 之面積，求 $\sum_{i=1}^{\infty}a_i=$______。

$\boxed{\text{答案}}$：$\sqrt{3}$

$\boxed{\text{解析}}$：正三角形邊長 $a\Rightarrow\begin{cases}R=\frac{2}{3}h=\frac{\sqrt{3}}{3}a\Rightarrow a=\sqrt{3}R\\ r=\frac{1}{3}h=\frac{\sqrt{3}}{6}a\end{cases}$

C_1 爲單位圓，T_1 邊長爲 $\sqrt{3}\Rightarrow a_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\sqrt{3})^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ，

C_2 之半徑爲 $\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{2}\Rightarrow a_2=\frac{3\sqrt{3}}{16}$

$\therefore$公比$=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{16}}{\frac{3\sqrt{3}}{4}}=\frac{3\sqrt{3}}{16}\times\frac{4}{3\sqrt{3}}=\frac{1}{4}$ ；$\sum_{i=1}^{\infty}a_i=\frac{a_1}{1-r}=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\sqrt{3}$

25、求 $\frac{1}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{7}{3^3}+\cdots+\frac{2^n-1}{3^n}+\cdots=$______。

$\boxed{\text{答案}}$：$\frac{3}{2}$

$\boxed{\text{解析}}$：原式$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k-1}{3^k}=\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^k-\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{3})^k=\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

26、化簡 $0.1\bar{6}\times(0.5\bar{6}+0.1\bar{3})=$______。

$\boxed{\text{答案}}$：$\frac{7}{60}$

$\boxed{\text{解析}}$：原式$=\frac{16-1}{90}\times(\frac{56-5}{90}+\frac{13-1}{90})=\frac{15}{90}\times(\frac{51}{90}+\frac{12}{90})=\frac{15}{90}\times\frac{63}{90}=\frac{1}{6}\times\frac{7}{10}=\frac{7}{60}$

27、設 a, b, c 皆爲 1 到 9 之間的數字，若 $\frac{158}{990}<0.\overline{abc}<\frac{145}{900}$ ，則 $b=$________, $c=$________。

$\boxed{\text{答案}}$：6, 0

$\boxed{\text{解析}}$：$\frac{158}{990}=0.1\overline{59}$ ；$\frac{145}{900}=0.16\bar{1}$

$0.159595959\cdots\cdots\quad\therefore a=1$

$0.abcabcabc\cdots\cdots\quad\therefore b=6$

$0.161111111\cdots\cdots\quad\therefore c=0$

28、已知數列 a_n 收斂，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n+(-2)^n a_n}{3-(-2)^n}=4$ ，則 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$______，又 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{-2}{3})^n a_n=$______。

$\boxed{答案}$：$-4,\ 0$

$\boxed{解析}$：設 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha,\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n+(-2)^n a_n}{3-(-2)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\frac{1}{2})^n+a_n}{3(-\frac{1}{2})^n-1}=-\alpha=4\quad \therefore\alpha=-4$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{-2}{3})^n\cdot a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(-\dfrac{2}{3})^n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0\times(-4)=0$

29、設 $a_n=\dfrac{3^{n+1}}{(2x-1)^{n-1}}$ ，則

(1)數列 $<a_n>$ 收斂時，x 的範圍爲______，　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收斂時，x 的範圍爲______。

$\boxed{答案}$：(1) $x\ge 2$ 或 $x<-1$ (2) $x>2$ 或 $x<-1$

$\boxed{解析}$：(1)數列收斂，$-1<\dfrac{3}{2x-1}\le 1,$

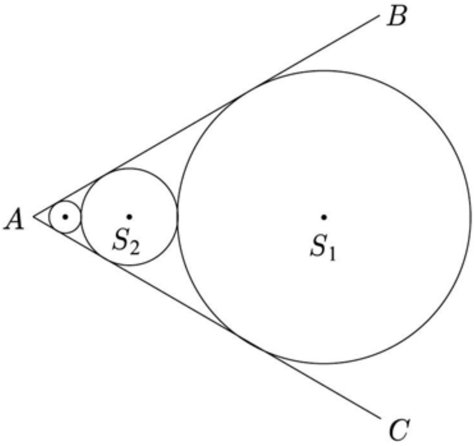
① $\dfrac{3}{2x-1}=1\Rightarrow x=2$

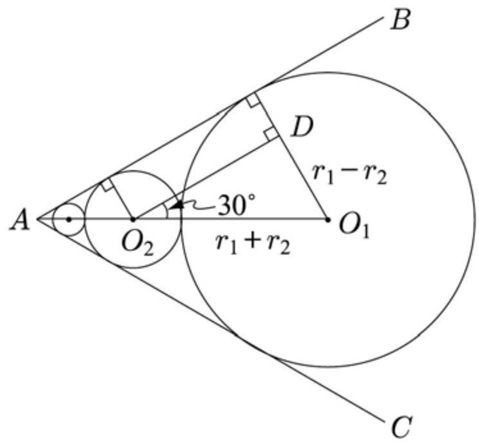
② $\left|\dfrac{3}{2x-1}\right|<1\Rightarrow|2x-1|>3\Rightarrow 2x-1>3\quad \text{or}\quad 2x-1<-3\Rightarrow x>2\quad or\quad x<-1$

由①②　$\therefore x\ge 2\quad or\quad x<-1$

(2)級數收斂之條件爲 $-1<\dfrac{3}{2x-1}<1\Rightarrow x>2\quad or\quad x<-1$

30、如圖，$\angle BAC=60^\circ$，設最大圓爲 S_1，若有無窮多個圓 $S_1,S_2,S_3,\ldots,S_n,\ldots$ 彼此相切且與 $\angle BAC$ 的兩邊 $\overline{AB}$ ，$\overline{AC}$ 相切，若 S_1 的面積爲 80π ，則此無窮多個圓面積和爲______。





$\boxed{答案}$：90π

$\boxed{解析}$：在 $\triangle O_1O_2D$ 中，$\overline{O_1O_2}=2\overline{O_1D}$

$\therefore r_1+r_2=2(r_1-r_2)\Rightarrow\dfrac{r_2}{r_1}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow$ 公比 $r=\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{\pi r_2^2}{\pi r_1^2}=(\dfrac{r_2}{r_1})^2=\dfrac{1}{9}$

$\therefore$面積和爲 $S_1+S_2+\cdots=\dfrac{80\pi}{1-\dfrac{1}{9}}=90\pi$ 。

31、將自然數按下列規律排列，每一列比前一列多一個數，如下表所示：

$$\begin{array}{l|l}
row\,1st & 1 \\
row\,2nd & 2,3 \\
row\,3rd & 4,5,6 \\
row\,4th & 7,8,9,10 \\
\cdots & \cdots
\end{array}$$

試問第 100 列第 3 個數是________。

答案：4953

解析：第 1 列至第 99 列的數共有 $1+2+3+\cdots+99=\dfrac{99\times100}{2}=4950\,(個)$，

$\therefore$第 100 列的第 3 個數是 4953。