高雄市明誠中學 高三數學平時測驗 日期：100.09.08					
範圍	第一回數與坐標系	班級	三年____班	姓名	
		座號			

A．

一、單一選擇題 (每題 5 分)

1-1、想判別 701 是否爲質數，試問需要檢驗多少個値數？

(1)7 (2)8 (3)9 (4)10 (5)11

答案： (3)

解析：値數判定原理：若 n 爲大於 1 的正整數，且所有不大於 $\sqrt{n}$ 質數皆不爲 n 之因數，則 n 爲質數。

$\sqrt{701}=26.\sim\Rightarrow$ 小於 26 的値數計有：2,3,5,7,11,13,17,19,23 共 9 個。

1-2、設 $P=\sqrt{12+2\sqrt{5}}$ ，試問最接近 P 的整數爲何？

(1)3 (2)4 (3)5 (4)6 (5)7

答案：(2)

解析： $P=\sqrt{12+2\sqrt{5}}=\sqrt{12+\sqrt{20}}=\sqrt{12+4.\sim}=\sqrt{16.\sim}=4.\sim$

1-3、坐標平面上，x 坐標與 y 坐標均爲整數的點稱爲『格子點』，試問下列哪一條直線不通過格子點？

(1) $x+2y=1$ (2) $2x+5y=13$ (3) $3x+11y=7$ (4) $3x+6y=11$ (5) $3x-7y=15$

答案：(4)

解析：整係數方程式 $ax+by=c$ ，若 $(a,b)\nmid c$ ，則 $ax+by=c$ 無整數解，即直線不過格子點。

(4) $3x+6y=11$ 之 $(3,6)=2\nmid 11\Rightarrow$ 無整數解

二、多重選擇題 (每題 10 分)

1-1、設 n 爲正整數，以 a_n 表示 $3n$ 除以 7 所得於數，試問下列哪些選項正確？

(1) $a_{10}=2$ (2) $a_{10}<a_{11}$ (3) $a_{50}<a_{100}$ (4) $a_{100}<a_{101}$ (5) $a_{101}<a_{102}$

答案：(1)(2)(3)(5)

解析：每連續 7 個整數一周期：(3625140)

$3\times1\div7\cdots\cdots3\Rightarrow a_1=3$

$3\times2\div7\cdots\cdots6\Rightarrow a_2=6$

$3\times3\div7\cdots\cdots2\Rightarrow a_3=2$

$3\times4\div7\cdots\cdots5\Rightarrow a_4=5$

$3\times5\div7\cdots\cdots1\Rightarrow a_5=1$

$3\times6\div7\cdots\cdots4\Rightarrow a_6=4$

$3\times7\div7\cdots\cdots0\Rightarrow a_7=0$

$3\times8\div7\cdots\cdots3\Rightarrow a_8=3$

$\vdots$

$$\Rightarrow\begin{cases}10\div7\cdots3\Rightarrow a_{10}=2\\11\div7\cdots4\Rightarrow a_{11}=5\\50\div7\cdots1\Rightarrow a_{50}=3\\100\div7\cdots2\Rightarrow a_{100}=6\\101\div7\cdots3\Rightarrow a_{10}=2\\102\div7\cdots4\Rightarrow a_{10}=5\end{cases}$$

1-2、等腰ΔABC中，$\overline{AC}=\overline{BC}\neq\overline{AB}$，若$A(1,-3), B(2,5)$，試問$C$點可能在哪一直線上？

(1) $x+4y=5$ (2) $x+4y=6$ (3) $4x-y=10$ (4) $4x-y=0$ (5) $x+y=10$

$\boxed{\text{答案}}$：(2)(3) (4) (5)

$\boxed{\text{解析}}$：設$C(x, y)$，因為$\overline{AC}=\overline{BC}\Rightarrow(x-1)^2+(y+3)^2=(x-3)^2+(y-5)^2$

所以$C(x, y)$在直線$L: x+4y=6$上，即L與直線交點就是C

其中$x+4y=5$與L平行無交點，其餘皆有交點。但注意$\overline{AC}=\overline{BC}\neq\overline{AB}$

1-3、坐標平面上有一個菱形$ABCD$，已知$A(1,1)$，直線$AB: 4x-3y-1=0$，中心$M(5,3)$，試問下列哪些點是此菱形的頂點？

(1) $(6,1)$ (2) $(6,3)$ (3) $(9,5)$ (4) $(5,9)$ (5) $(4,5)$

$\boxed{\text{答案}}$：(1)(3)(5)

$\boxed{\text{解析}}$：Ω

頂點$A(1,1)$、中心$M(5,3)\Rightarrow C(9,5)$ (中點性質)

因為$\overline{AB}//\overline{CD}$，設直線$CD: 4x-3y+k=0$，過$C(9,5)\Rightarrow 36-15+k=0,\quad k=-21$

直線$CD: 4x-3y-21=0$

直線$AC: \dfrac{y-1}{x-1}=\dfrac{1-5}{1-9}\Rightarrow x-2y+1=0$

又過中心$M(5,3)$垂直直線$AC: x-2y+1=0\Rightarrow$直線$MB: 2x+y-13=0$

(兩互相垂直線斜率乘積-1)

直線AB、MB交點$B\Rightarrow\begin{cases}4x-3y-1=0\\2x+y-13=0\end{cases}\Rightarrow B(4,5)$

直線CD、MB交點$D\Rightarrow\begin{cases}4x-3y-21=0\\2x+y-13=0\end{cases}\Rightarrow D(6,1)$

三、填充題 (每題 10 分)

1-1、四邊形$ABCD$中，$A(-3,1), B(1,-2), C(5,5), D(1,10)$，則兩對角線交點？

$\boxed{\text{答案}}$：$(1,3)$

$\boxed{\text{解析}}$：直線$AC: \dfrac{y-1}{x+3}=\dfrac{1-5}{-3-5}\Rightarrow x-2y+5=0$；直線$BD: x=1\Rightarrow\begin{cases}x=1\\x-2y+5=0\end{cases}\Rightarrow(1,3)$

1-2、某甲開始學打撞球，明白撞球的原理，如圖$\alpha=\beta$，他知道求從點P打出，碰到求檯邊點A反彈後，會沿$\overleftrightarrow{AB}$行進，若以坐標平面表式求行進軌跡，已知$\overleftrightarrow{AB}$的方程式為$4x-7y-16=0$，設$\overleftrightarrow{AP}$的方程式為$ax+by-16=0$，則$a+b=$__________。

$\boxed{\text{答案}}$：$(4,7)\Rightarrow a+b=11$

$\boxed{\text{解析}}$：Ω

$4x-7y-16=0$交軸於$A(4,0)\Rightarrow ax+by-16=0$ 過$A\Rightarrow 4a-16=0, a=4$

直線 $\overleftrightarrow{AP}$ 的方程式 $4x+by-16=0 \Rightarrow m_{AP}=-\frac{4}{b}$

$4x-7y-16=0 \Rightarrow m_{AB}=\tan\beta=-\frac{4}{-7}=\frac{4}{7}$

又 $m_{AP}=\tan(180°-\alpha)=\tan(180°-\beta)=-\tan\beta \Rightarrow -\frac{4}{7}=-\frac{4}{b}, b=7$

1-3、通過 $A(3,5)$ 的所有直線中，與原點距離最大的直線方程式爲________________。

$\boxed{答案}$：$3x+5y-34=0$

$\boxed{解析}$：Ω

通過 $A(3,5)$ 的所有直線中，與原點距離最大的直線：與 $\overline{OA}$ 垂直的直線

$m_{OA}=\frac{0-5}{0-3}=\frac{5}{3} \Rightarrow$ 所求直線斜率 $-\frac{3}{5}$；所求直線 $y-5=-\frac{3}{5}(x-3) \Rightarrow 3x+5y-34=0$

1-4、若平面上兩點 $P(4,-3), Q(2,k)$ 的垂直平分線方程式 $L: x-y+t=0$，則 $t=$__________。

$\boxed{答案}$：$t=-5$

$\boxed{解析}$：$m_{PQ}=\frac{-3-k}{4-2}=-\frac{k+3}{2}$，直線 L 斜率 $m_L=-\frac{1}{-1}=1$；

$\overleftrightarrow{PQ} \perp L \Rightarrow m_{PQ} \times m_L=-1 \Rightarrow -\frac{k+3}{2}=-1, \quad k=-1$

兩點 $P(4,-3), Q(2,-1)$ 中點 $(3,-2)$ 在直線 L 上，代入 $3+2+t=0 \Rightarrow t=-5$

1-5、坐標平面上，直線 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 以原點爲軸心依逆時針方向旋轉 $30°$ 後，所得新方程式爲____________________。

$\boxed{答案}$：$y=\sqrt{3}x$

$\boxed{解析}$：直線 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x \Rightarrow m=\frac{\sqrt{3}}{3}=\tan 30°$，以原點爲軸心依逆時針方向旋轉 $30°$ 後，方向角爲 $30°+30°=60°$，新直線斜率 $m=\tan 60°=\sqrt{3}$；新方程式 $y=\sqrt{3}x$

1-6、設 $C(-6,12)$，若直線 L 通過 C 點，分別交 x 軸，y 軸於 A、B 兩點，且 $\overline{BC}=3\overline{AB}$，試問直線 L 的斜率爲____________。

$\boxed{答案}$：$-\frac{3}{2}$

$\boxed{解析}$：設直線方程式爲 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \Rightarrow A(a,0), B(0,b)$

又 $\overline{BC}=3\overline{AB} \Rightarrow \overline{BC}:\overline{AB}=3:1$，根據分點公式’ $(0,b)=(\frac{3a+(-6)}{3+1},\frac{0+12}{3+1}) \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$

即直線 $L: \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1 \Rightarrow 3x+2y-6=0$，斜率爲 $-\frac{3}{2}$

B‧

一、單一選擇題 (每題 5 分)

2-1、若將 31460 的正因數由大而小排列依序爲 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$，則 $a_6 =$ ？

(A)2860　(B)2420　(C)3146　(D)6292　(E)1573

答案： (C)

解析： $31460 = 31460 \times 1 = 15730 \times 2 = 7865 \times 4 = 6292 \times 5 = 39325 \times 8$

$= 3146 \times 10 = \cdots\cdots \Rightarrow a_6 = 3146$

2-2、已知 a, b, c 皆爲質數，且 $\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} = \dfrac{1}{11}$，則 $a + b + c$ 之最大值爲何？

(A)19　(B)26　(C)27　(D)29　(E)31

答案：(B)

解析： $\dfrac{1}{ab} + \dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} = \dfrac{1}{11} \Rightarrow$ 去分母 $11(c + a + b) = abc$

因爲 a, b, c 皆爲質數 $\Rightarrow a, b, c$ 中必有一數爲 11，設 $a = 11 \Rightarrow b + c + 11 = bc$ 因式分解

$(b-1)(c-1) = 12 \Rightarrow \begin{cases} b-1: & 1 \quad 2 \quad 3 \Rightarrow b = 2, 3, 4 \\ c-1: & 12 \quad 6 \quad 4 \Rightarrow c = 13, 7, 5 \end{cases}$，其中 $b = 4, c = 5$ (不合)

$a + b + c$ 之最大值爲 $11 + 2 + 13 = 26$

2-3、設 a, b 均爲實數，若 $|2x - a| \le b$ 的解爲 $-1 \le x \le 9$，則數對 $(a, b) =$ ？

(A) $(1, 2)$　(B) $(2, 5)$　(C) $(7, 6)$　(D) $(4, 8)$　(E) $(8, 10)$

答案：(E)

解析：Ω

$-1 \le x \le 9 \Rightarrow$ 中點 $\dfrac{-1+9}{2} = 4$ 、距離之半 $\dfrac{1}{2}[9 - (-1)] = 5$

$-1 \le x \le 9 \Rightarrow |x - 4| \le 5 \Rightarrow |2x - 8| \le 10$

二、多重選擇題 (每題 10 分)

2-4、下列敘述何者不正確？

(A) $\sqrt{3} + \sqrt{14} > \sqrt{4} + \sqrt{13}$　(B)兩個有理數之間必有一整數

(C)若 P 爲質數，則 $\sqrt{P}$ 必爲無理數　(D) a, b 爲實數，若 $a + b\sqrt{2} = 0$，則 a, b 均爲 0

(E) 循環小數爲無理數

答案：(A)(B)(D)(E)

解析： (A) $(\sqrt{3} + \sqrt{14})^2 = 17 + 2\sqrt{42} < 17 + 2\sqrt{52} = (\sqrt{4} + \sqrt{13})^2 \Rightarrow \sqrt{3} + \sqrt{14} < \sqrt{4} + \sqrt{13}$

(B) $\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}$ 之間沒整數

(D)設 $a = \sqrt{2}, b = -1 \Rightarrow a + b\sqrt{2} = 0$，但 a, b 不爲 0

(E) $0.\overline{34} = \dfrac{34}{99} \in Q$

2-5、下列敘述何者不正確？

(A)若a,b,c 爲整數，且$ac=bc$ ，則$a=b$

(B)若a,b,c 爲整數，且$a<b$，則$ac<bc$

(C)若a爲有理數，b爲無理數，則$a+b,\quad ab$必爲無理數

(D)若a，b均爲無理數，則$a+b,\quad ab$必爲無理數

(E)若$a+b$，$b+c$，$c+a$均爲有理數，則a,b,c 亦爲有理數

$\boxed{\text{答案}}$：(A)(B)(C)(D)

$\boxed{\text{解析}}$： (A)$c=0$，原式不成立

(B)$c<0$，原式不成立

(C)設$a=0,b=\sqrt{2}\Rightarrow ab=0\in Q$，原式不成立

(D)設$a=2+\sqrt{2},b=2-\sqrt{2}\Rightarrow$但$a+b=4,\quad ab=4-2=2$ 皆爲有理數

(E) $a+b$，$b+c$，$c+a$均爲有理數$\Rightarrow(a+b)+(b+c)+(c+a)=2(a+b+c)\in Q$

$$a+b+c\in Q\Rightarrow a=(a+b+c)-(b+c)\in Q$$

$$b=(a+b+c)-(c+a)\in Q$$

$$c=(a+b+c)-(a+b)\in Q$$

三、填充題 (每題 10 分)

2-6、設$f(x)=99x+79$，則$\dfrac{f(123)-f(\sqrt{2})}{123-\sqrt{2}}=$？

$\boxed{\text{答案}}$：99

$\boxed{\text{解析}}$：$\dfrac{f(123)-f(\sqrt{2})}{123-\sqrt{2}}$表過$(123,\ f(123)),(\sqrt{2},\ f(\sqrt{2}))$兩點的直線$y=99x+79$斜率 99

2-7、設$A(-2,3),B(3,2)$，若直線$y=mx-3\quad(m\in R)$與$\overline{AB}$有交點，求m範圍________。

$\boxed{\text{答案}}$：$m\geq\dfrac{5}{3}$或$m\leq-3$

$\boxed{\text{解析}}$：Ω

$y=mx-3\quad(m\in R)$表過點$(0,-3)$，斜率爲m的直線

直線$y=mx-3$過$A(-2,3)\Rightarrow3=-2m-3,\quad m=-3$

直線$y=mx-3$過$B(3,2)\Rightarrow2=3m-3,\quad m=\dfrac{5}{3}$

與$\overline{AB}$有交點$\Rightarrow m\geq\dfrac{5}{3}$或$m\leq-3$

2-8、設α,β爲方程式$x^2+6x+1=0$的兩根，求$(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2=$________________。

$\boxed{\text{答案}}$：-4

$\boxed{\text{解析}}$：α,β爲方程式$x^2+6x+1=0$的兩根$\Rightarrow\begin{cases}\delta=6^2-4\times1\times1=32\\\alpha+\beta=-6\\\alpha\beta=1\end{cases}\Rightarrow\alpha<0,\quad\beta<0$

$(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2=(\sqrt{\alpha})^2-2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}+(\sqrt{\beta})^2=(\alpha+\beta)+2\sqrt{\alpha\beta}=-6+2\times 1=-4$

2-9、令 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ，求 $(5-3\omega-3\omega^2)(7-2\omega+7\omega^2)(4+4\omega-3\omega^2)=$__________。

答案：504

解析：$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\Rightarrow\begin{cases}\omega^3=1\\1+\omega+\omega^2=0\end{cases}$

$$\begin{aligned}&(5-3\omega-3\omega^2)(7-2\omega+7\omega^2)(4+4\omega-3\omega^2)\\=&[(8-3(1+\omega+\omega^2)][7(1+\omega+\omega^2)-9\omega][(4(1+\omega+\omega^2)-7\omega^2]\\=&(8-0)(0-9\omega)(0-7\omega^2)=504\omega^3=504\end{aligned}$$

2-10、設 a, b 為實數，若 $\dfrac{63-36i}{a+bi}=36+63i$ ，則實數對 $(a, b)=$____________________。

答案：$(0,-1)$

解析：$\dfrac{63-36i}{a+bi}=36+63i\Rightarrow a+bi=\dfrac{63-36i}{36+63i}=\dfrac{(63-36i)(36-63i)}{36^2+63^2}$

$$=\frac{(63\times 36-36\times 63)-(36^2+63^2)i}{36^2+63^2}=0-i\Rightarrow(a,b)=(0,-1)$$