總複習 1~4冊 第6回 三角函數的性質 詳解

一、概念題

1. $\pm\frac{\sqrt{7}}{4}$　2. 6　3. (A)(E)　4. $\frac{8}{9}$；$-\frac{47}{81}$　5. $\frac{2\pi}{3}$；$(2,-6)$　6. $(13,-13)$　7. 20　8. $512\sqrt{3}+512i$

二、單一選擇題

9. (D)　10. (C)

三、多重選擇題

11. (A)(B)(D)(E)　12. (B)(C)(D)(E)

四、填充題

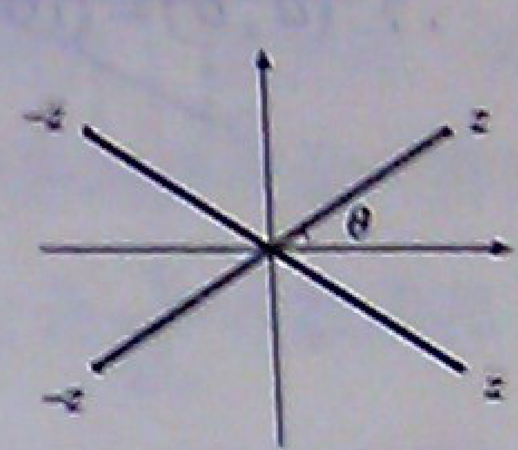
13. 6　14. $\frac{56}{65}$　15. 5　16. $(10,\frac{16}{21}\pi)$

-- 詳　解 --

二、單一選擇題

9. 若 $Arg(z)=\theta$，則 $\bar{z}$ 的幅角為 $-\theta$，$-z$ 的幅角為 $\theta+180^\circ$，$-\bar{z}$ 的幅角為 $-\theta+180^\circ$，

$\frac{1}{z}=z^{-1}$ 的幅角為 $-\theta$，z^2 的幅角為 2θ



∴ 選(D)

10. $\cot\theta-\tan\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\cos2\theta}{\frac{1}{2}\sin2\theta}=2\cdot\frac{\cos2\theta}{\sin2\theta}=2\cot2\theta$

∴ 選(C)

三、多重選擇題

11. (A) $2\sin5^\circ\cos5^\circ=\sin10^\circ$，合

(B) $\cos(-80^\circ)=\cos80^\circ=\sin10^\circ$，合

(C) $\sin190^\circ=-\sin10^\circ$，不合

(D) $\sin170^\circ=\sin10^\circ$，合

(E) $1-2\sin^2 40^\circ=\cos80^\circ=\sin10^\circ$，合

∴ 選(A)(B)(D)(E)

12. (A)(B) $x=2(\sin10^\circ+i\cos10^\circ)=2(\cos80^\circ+i\sin80^\circ)$

則 $x^3=8(\cos240^\circ+i\sin240^\circ)=8(\frac{-1}{2}+\frac{-\sqrt{3}}{2}i)=-4-4\sqrt{3}i$　∴ $a=-4$，$b=-4\sqrt{3}$，(A)不合，(B)合

(C) $|b+ai|=|a+bi|=|x^3|=|x|^3=2^3=8$，合

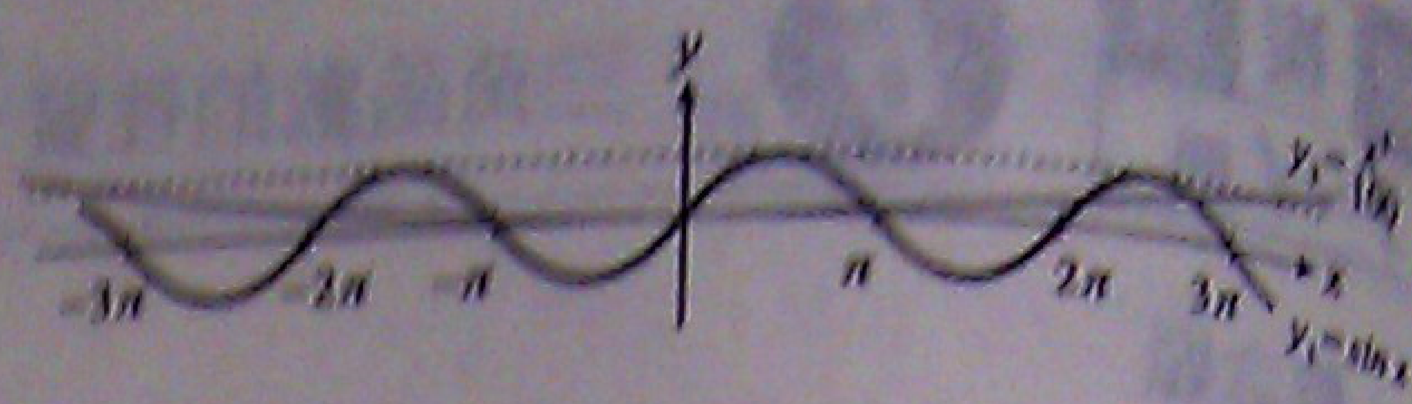
(D)(E) ∵ 三個根把圓周三等分，另兩根為 $2(\cos200^\circ+i\sin200^\circ)$ 與 $2(\cos320^\circ+i\sin320^\circ)$

而 $-2(\cos20^\circ+i\sin20^\circ)=2(\cos200^\circ+i\sin200^\circ)$　∴ (D)(E)皆合

∴ 選(B)(C)(D)(E)

四、填充題

設即 $\sin x = \frac{x^2}{100}$，令 $y_1 = \sin x$，$y_2 = \frac{x^2}{10}$，作圖如右



範圍 -10~10　∵ 共有 6 個交點　∴ 共 6 個實根

且令 $\angle COB = \theta_1$，則 $\sin\theta_1 = \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}} = \frac{3}{5}$，$\cos\theta_1 = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{4}{5}$

令 $\angle ROQ = \theta_2$，則 $\sin\theta_2 = \frac{\overline{RQ}}{\overline{OQ}} = \frac{5}{13}$，$\cos\theta_2 = \frac{\overline{OR}}{\overline{OQ}} = \frac{12}{13}$

$\therefore \sin\angle COQ = \sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2 = \frac{3}{5} \times \frac{12}{13} + \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{56}{65}$

且設 $\angle ABP = \theta$，則 $\angle CBQ = 90^\circ - \theta$，$\overline{BP} = 4\cos\theta$，$\overline{BQ} = 3\cos(90^\circ - \theta) = 3\sin\theta$

$\therefore \overline{BP} + \overline{BQ} = 4\cos\theta + 3\sin\theta$，$0^\circ \le \theta \le 90^\circ$，最大值為 $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

且∵ $1 + \sqrt{3}i = 2(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$，$\frac{3}{7}\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{16}{21}\pi$

$\therefore z \cdot (1 + \sqrt{3}i) = 5(\cos\frac{3}{7}\pi + i\sin\frac{3}{7}\pi) \cdot 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 10(\cos\frac{16}{21}\pi + i\sin\frac{16}{21}\pi)$

$\therefore (a, \theta) = (10, \frac{16}{21}\pi)$