一、單一選擇題

1.(C) 2.(C)

二、多重選擇題

3.(C)(E) 4.(A)(B)(C)(E)

三、填充題

5. 8 6. $-4x-9$ 7. $(-6,8,2,-4)$ 8. 780 9. 25 10. 2450 11. $(1,3,-2,5)$ 12. $(\frac{21}{25},\frac{22}{25})$

詳解

一、單一選擇題

1. 設斜率分別為 m_1、m_2、m_3、m_4、m_5 與 m_L

則 $m_1\cdot m_L>0$，$m_2\cdot m_L=0$，$-1<m_3\cdot m_L<0$，$m_4\cdot m_L=-1$，$m_5\cdot m_L<-1$

∴ 選(C)

2. (A) $x=1$ 代入，餘式 $=1+1=2$，不合

(B) x^2 用 -1 代入，餘式 $=(-1)^{17}\cdot x+1=-x+1$，不合

(C) x^5 用 -1 代入，餘式 $=(-1)^7+1=0$，合

(D) x^8 用 1 代入，餘式 $=1^4\cdot x^3+1=x^3+1$，不合

(E) x^{12} 用 -1 代入，餘式 $=(-1)^2\cdot x^{11}+1=x^{11}+1$，不合

∴ 選(C)

二、多重選擇題

3. ①若 $a>0$，則 $f(x)$ 恆正 ∴ $af(x)>0$，$cf(x)>0$，b 可正可負

②若 $a<0$，則 $f(x)$ 恆負 ∴ $af(x)>0$，$cf(x)>0$，b 可正可負

故選(C)(E)

4. (A) $f(-x)=(-x)^4-6(-x)^2+4=x^4-6x^2+4=f(x)$，合

(B)所有可能的有理根為 ±1、±2、±4 代入皆不合 ∴ $f(x)=0$ 沒有有理根，但 $f(0)\cdot f(1)=4\cdot(-1$

∴ 在 $0<x<1$ 有無理根

(C) ∵ $f(-1)=1-6+4<0$，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$ ∴ 在 $x<-1$ 範圍內有 $f(x)=0$ 的實根，合

(D)在 $x<-1$，$-1<x<0$，$0<x<1$，$x>1$ 內都有根 ∴ $f(x)=0$ 沒有虛根，不合

(E) ∵ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\infty$ ∴ 可找到唯一的實數 α 滿足 $f(\alpha)=f(-\alpha)=2^{100}$，合

三、填充題

5. 同乘 7 得 $\frac{21}{8}=a_1+\frac{a_2}{7}+\frac{a_3}{7^2}+\frac{a_4}{7^3}+\cdots$，得 $a_1=2$，且 $\frac{5}{8}=\frac{a_2}{7}+\frac{a_3}{7^2}+\frac{a_4}{7^3}+\cdots$

再同乘 7 得 $\frac{35}{8}=a_2+\frac{a_3}{7}+\frac{a_4}{7^2}+\cdots$，得 $a_2=4$ 且 $\frac{3}{8}=\frac{a_3}{7}+\frac{a_4}{7^2}+\cdots$

再同乘 7 得 $\frac{21}{8}=a_3+\frac{a_4}{7}+\cdots$，得 $a_3=2$ ∴ 所求 $=2+4+2=8$

設 $f(x)=ax+b$，$f(\alpha)=a\alpha+b=3\beta-\alpha \cdots①$，$f(\beta)=a\beta+b=3\alpha-\beta\cdots②$

①－②得 $a(\alpha-\beta)=4\beta-4\alpha$

$\therefore\ a=\dfrac{4\beta-4\alpha}{\alpha-\beta}=\dfrac{-4(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}=-4$ 代回①得 $-4\alpha+b=3\beta-\alpha$ $\therefore\ b=3\beta+2\alpha=3(\alpha+\beta)=3\cdot(-\dfrac{3}{1})=-9$

$\therefore f(x)=-4x-9$

$\because$ 切 x 軸於 $x=1$ $\therefore\ x=1$ 為 $f(x)=0$ 的二重根，即 $f(x)$ 有 $(x-1)^2$ 的因式

設 $f(x)=(x-1)^2(px+q)$，$f(-1)=4(-p+q)=8$，得 $-p+q=2$，$f(0)=1\cdot(0+q)=q=-4$，則 $p=-6$

$\therefore\ f(x)=(x-1)^2(-6x-4)=-6x^3-8x^2+2x-4 \Rightarrow (a,b,c,d)=(-6,8,2,-4)$

由 $P(1)=1$，$P(1+2+3)=1-2+3=2$，$P(1+2+3+4+5)=1-2+3-4+5=3$，得 $20\times2-1=39$

1 個　3 個　2 倍減 1　5 個　2 倍減 1

$\therefore\ P(1+2+\cdots+39)=20$，即 $P(780)=20$ $\therefore$ 最小 n 值為 780

設 $\overline{OB}=x$，則由 $\Delta OAB\sim\Delta OBC$ 得 $\overline{OC}=x^2$，由 $\Delta OBC\sim\Delta OCD$ 得 $\overline{OD}=x^3$

$\therefore\ m_{AD}=\dfrac{x^3}{1}=8$，得 $x=2$ $\therefore\ \overline{OB}=2$，$\overline{OC}=4$，$\overline{OD}=8$

則梯形面積 $=\Delta OAB+\Delta OBC+\Delta OCD+\Delta ODA=\dfrac{1\cdot2}{2}+\dfrac{2\cdot4}{2}+\dfrac{4\cdot8}{2}+\dfrac{8\cdot1}{2}=1+4+16+4=25$

因 $a_1+a_{50}=a_{10}+a_{41}$

$\therefore$ 所求 $=\dfrac{(a_1+b_1)+(a_{50}+b_{50})}{2}\times50=\dfrac{b_1+b_{50}+a_{10}+a_{41}}{2}\times50=\dfrac{31+67}{2}\times50=49\times50=2450$

由小明的過程知正確的 $f(x)$ 為 $f(x)=8(x+\dfrac{1}{2})^3+12(x+\dfrac{1}{2})^2-4(x+\dfrac{1}{2})+5$

$\therefore\ f(x)=(2x+1)^3+3(2x+1)^2-2(2x+1)+5$ 為正確的

$(p,q,r,s)=(1,3,-2,5)$

$\dfrac{a}{1-r}=7\cdots①$，$\dfrac{2a}{1-\dfrac{r}{2}}=3\cdots②$

由①知 $a=7-7r$，代入②得 $2(7-7r)=3-\dfrac{3r}{2}$，即 $28-28r=6-3r$，得 $r=\dfrac{22}{25}$；代①得 $a=\dfrac{21}{25}$

$\therefore\ (a,r)=(\dfrac{21}{25},\dfrac{22}{25})$