第二章　總複習

基礎題

<單選題>

1. 已知四邊形的四邊在下列四直線上：L_1：$x-1=0$，L_2：$y-2=0$，L_3：$x-3=0$，L_4：$y-5=0$，試問此四邊形的形狀為

(1)正方形　(2)菱形　(3)長方形　(4)梯形．

解： 因 L_1 與 L_3 為平行的兩鉛直線，

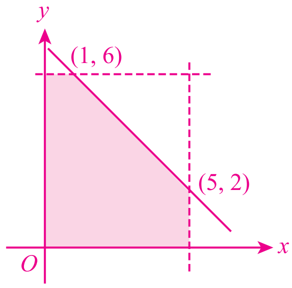
L_2 與 L_4 為平行的兩鉛直線，

所圍四邊形為四頂點 $(1,2)$，$(3,2)$，$(3,5)$，$(1,5)$ 的長方形，故選(3)．

2. 不等式組 $\begin{cases} 0<x<5 \\ 0<y<6 \\ x+y\le 7 \end{cases}$ 所表示的區域中有多少個格子點？

(1) 7　(2) 12　(3) 17　(4) 21．

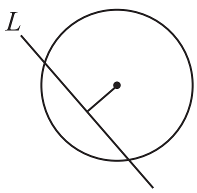
解：



x	y
1	1, 2, 3, 4, 5
2	1, 2, 3, 4, 5
3	1, 2, 3, 4
4	1, 2, 3

共 $5+5+4+3=17$ 個格子點，故選(3)．

3. 設 Γ：$x^2+y^2-10x+9=0$ 為坐標平面上的圓，試問 Γ 上與直線 $L:3x+4y-5=0$ 距離等於 2 的點之個數為

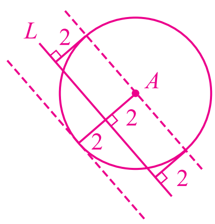


(1) 1　(2) 2　(3) 3　(4) 4．

解： Γ：$(x-5)^2+y^2=4^2$，知圓心 $A(5,0)$，半徑 $r=4$，

因 $d(A,L)=\dfrac{|15+0-5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$，且半徑為 4，

得 Γ 上與 L 距離為 2 的共有 3 點，故選(3)．



＜多選題＞

4. 已知直線 L ：$3x-4y-12=0$，試問下列哪些選項正確？

(1) x 截距為 4　(2) y 截距為 3　(3)斜率為 $\frac{3}{4}$　(4)斜率為 $\frac{4}{3}$.

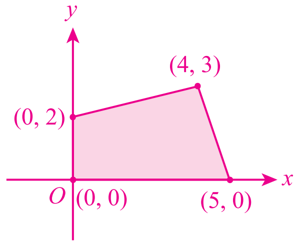
解：(1) L 與 x 軸的交點 $(4,0)$，得 x 截距為 4 .

(2) L 與 y 軸的交點 $(0,-3)$，得 y 截距為 -3 .

(3)(4) $m=\frac{3}{4}$. 故選(1)(3) .

5. 設點 (x, y) 是不等式組 $\begin{cases} x-4y+8\ge 0 \\ 3x+y-15\le 0 \\ x\ge 0,\ y\ge 0 \end{cases}$ 區域內任一點(含邊界)，當 $(x, y)=(4,3)$ 時，$x+ty$ 有最大值，試問 t 值可能為(1) -4　(2) $-\frac{1}{3}$　(3) $\frac{1}{3}$　(4) 4 .

解：



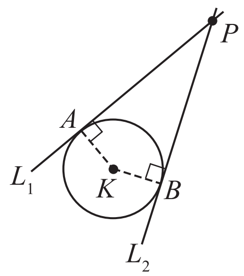
(x, y)	$x+ty$
$(0, 0)$	0
$(5, 0)$	5
$(4, 3)$	$4+3t$
$(0, 2)$	$2t$

$\begin{cases} 4+3t\ge 0 \\ 4+3t\ge 5 \\ 4+3t\ge 2t \end{cases}$，知 $t\ge \frac{1}{3}$，故選(3)(4) .

6. 圓 C ：$(x-1)^2+(y-2)^2=1$，自圓外一點 $P(3,5)$ 作圓 C 的切線 L_1，L_2，切點分別為 A，B，若 $\triangle PAB$ 的外接圓為 S，試問下列哪些選項正確？

(1)圓 S 通過圓 C 的圓心 $(1,2)$　(2)圓 S 的直徑長為 5

(3)圓 S 的方程式為 $x^2+y^2-4x-7y+13=0$　(4) $\overline{AP}=4$.



解：(1) $\angle KAP=90^\circ$，$\angle KBP=90^\circ$，知 K，A，P，B 共圓 .

(2)圓 S 的一直徑 $\overline{KP}=\sqrt{13}$.

(3)圓 S 的圓心為 $(2,\frac{7}{2})$，半徑 $r=\frac{\sqrt{13}}{2}$，得 S ：$x^2+y^2-4x-7y+13=0$.

(4) $\overline{KP}=\sqrt{13}$，$\overline{AK}=1$，得 $\overline{AP}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.　故選(1)(3) .

進階題

1. 設 $A(3,1)$，$B(5,3)$，試求：

   (1)直線 AB 的斜率．

   (2) $\overline{AB}$ 的垂直平分線．

   解：(1)直線 AB 的斜率為 1．

   (2) $\overline{AB}$ 的中點 $M(4,2)$，且垂直平分線的斜率為 -1，

   由 $y-2=-1(x-4)$，得 $x+y-6=0$．

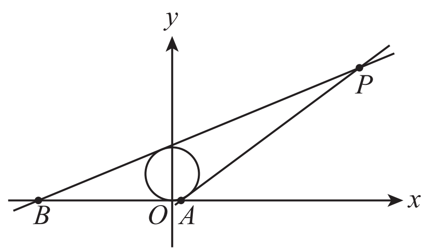
2. 三直線 L_1：$x+2y=4$，L_2：$3x+y=7$，L_3：$kx-y=3$ 恰相交於 P 點，

   (1)試求 P 點坐標．　(2)試求 k 值．

   解：(1)由 L_1 與 L_2 的方程組 $\begin{cases} x+2y=4 \\ 3x+y=7 \end{cases}$，知 $P(2,1)$．

   (2) P 點在 L_3 上，代入 $2k-1=3$，得 $k=2$．

3. 在坐標平面上 $P(7,5)$ 處有一光源，將圓 C：$x^2+(y-1)^2=1$ 投影到 x 軸的正射影 $\overline{AB}$，試求 $\overline{AB}$ 的長．



   解：自圓外 $P(7,5)$ 作圓 C 的二切線，

   L：$y-5=m(x-7)$ $\Rightarrow$ $mx-y-7m+5=0$，

   圓心 $(0,1)$ 到切線 L 的距離為半徑 1，$\dfrac{|-7m+4|}{\sqrt{m^2+1}}=1$，得 $m=\dfrac{3}{4}$ 或 $m=\dfrac{5}{12}$，

   所求切線 $3x-4y-1=0$，交 x 軸 $A(\dfrac{1}{3},0)$，

   $5x-12y+25=0$，交 x 軸 $B(-5,0)$

   $\Rightarrow$ $\overline{AB}=\dfrac{16}{3}$．

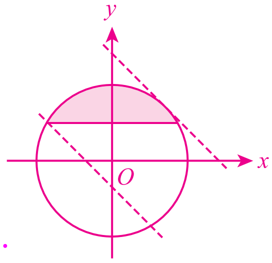
4. 設 R 代表坐標平面上由下列兩個不等式所定義的區域 $\begin{cases} x^2+y^2\le 4 \\ y\ge 1 \end{cases}$，求函數 $x+y$ 在區域 R 上的最大值與最小值．

解：區域 R 是右圖中陰影的部分，設 $x+y=k$，

(1) k 的最大值，在 $x+y=k$ 與 $x^2+y^2=4$ 相切時，

$\frac{|k|}{\sqrt{2}}=2$，得 $k=2\sqrt{2}$（取正值）.

(2) k 的最小值，在 $x+y=k$ 通過點 $(-\sqrt{3},1)$ 時，得 $k=1-\sqrt{3}$.



5. 在一個牽涉到兩個未知量 x， y 的線性規劃作業中，有三個限制條件．坐標平面上符合這三個限制條件的區域是一個三角形區域．假設目標函數 $ax+by$（ a， b 是常數）在此三角形的一個頂點 $(19,12)$ 上取得最大值 31，而在另一個頂點 $(13,10)$ 取得最小值 23．現因業務需要，加入第四個限制條件，結果符合所有限制條件的區域變成一個四邊形區域，頂點少了 $(19,12)$，新增了 $(17,13)$ 和 $(16,11)$ ．在這四個限制條件下，請選出正確的選項．

(1) $ax+by$ 的最大值發生在 $(17,13)$　(2) $ax+by$ 的最小值發生在 $(16,11)$

(3) $ax+by$ 的最大值是 30　(4) $ax+by$ 的最小值是 27．

解：因 $\begin{cases} f(19,12)=19a+12b=31 \\ f(13,10)=13a+10b=23 \end{cases}$，得 $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$，

知目標函數爲 $k=x+y$，可行解區域如右圖：

又因原本在三角形中 $(19,12)$ 有最大值，

在 $(13,10)$ 有最小值，

知三角形中之另一點 A 必在 $x+y=31$ 與 $x+y=23$ 之間，

又題目要求新的限制條件爲一四邊形區域，

又點 A 必然要介於 $x+y=23$ 與 $x+y=30$ 中間，

知 $k=ax+by$ 之最大值爲 30，最小值爲 23，故選(1)(3)．