2-3 圓

基礎題

1. 已知 $\overline{AB}$ 是圓 C 的一直徑，且 $A(1,3)$，$B(5,1)$，試問哪一個選項不正確？
   (1)圓 C 的圓心為 $(3,2)$　(2)圓 C 的半徑為 5
   (3)點 $P(4,4)$ 是圓上的一點　(4)圓 C 對稱於直線 $x=3$．
   解：(1)圓心是 $\overline{AB}$ 的中點 $K(3,2)$．
   (2)半徑 $r=\overline{AK}=\sqrt{5}$．
   (3)因 $\overline{KP}=\sqrt{5}$，知點 P 是圓上的一點．
   (4)因 $x=3$ 通過圓心 K，知圓 C 對稱於 $x=3$．故選(2)．

2. 設圓 C：$x^2+y^2=4$，試問圓 C 與下列哪一條直線相切？
   (1) L_1：$3x-4y=0$　(2) L_2：$3x-4y+5=0$
   (3) L_3：$3x-4y+10=0$　(4) L_4：$3x-4y+15=0$．
   解：圓 C 的圓心為 $K(0,0)$，半徑是 2，
   (1) $d(K,L_1)=\dfrac{|0-0|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=0<2$．　(2) $d(K,L_2)=\dfrac{|0-0+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1<2$．
   (3) $d(K,L_3)=\dfrac{|0-0+10|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$．　(4) $d(K,L_4)=\dfrac{|0-0+15|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=3>2$．故選(3)．

3. 在坐標平面上，選出與圓 C：$(x-3)^2+(y-4)^2=5^2$ 相切的直線：
   (1) $3x+4y=5$　(2) $3x+4y=0$　(3) $4x+3y=5$　(4) $4x+3y=0$．
   解：圓心 $(3,4)$ 到直線 L 的距離為半徑 $r=5$．
   (1) $d=\dfrac{|9+16-5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=4<r$．　(2) $d=\dfrac{|9+16|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=5=r$．
   (3) $d=\dfrac{|12+12-5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{19}{5}<r$．　(4) $d=\dfrac{|12+12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{24}{5}<r$．故選(2)．

4. 設方程式 $x^2+y^2-2x-2ky+k^2-k=0$ 的圖形是一圓，試求 k 的範圍．
   解：整理成 $(x-1)^2+(y-k)^2=k+1$，圖形是一圓 $r^2=k+1>0$，得 $k>-1$．

5. 設 $A(0,0)$，$B(0,4)$，$C(3,3)$，試求 $\triangle ABC$ 外接圓的方程式．

解：圓的一般式 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$，

因通過 A，B，C 三點，得 $\begin{cases} f=0 \\ 16 \quad +4e+f=0 \\ 18+3d+3e+f=0 \end{cases}$，

解方程式組得 $d=-2$，$e=-4$，$f=0$，所求方程式為 $x^2+y^2-2x-4y=0$．

6. 已知圓 C 通過 $A(1,2)$，$B(5,-2)$，且圓心在直線 $2x+y=6$ 上面，試求圓 C 的方程式．

解：圓心在 $\overline{AB}$ 的中垂線 $x-y=3$ 上，又圓心在 $2x+y=6$ 上，

解聯立，得圓心 $Q(3,0)$，半徑 $r=2\sqrt{2}$，C：$(x-3)^2+(y-0)^2=8$．

進階題

1. 已知 $A(-2,0)$，$B(1,0)$，若 $P(x,y)$ 為平面上動點且 $\overline{PA}=2\overline{PB}$，試求所有 P 點的軌跡方程式．

解：$\overline{PA}^2=4\overline{PB}^2$，

$\overline{PA}^2=(x+2)^2+(y-0)^2=x^2+y^2+4x+4$，

$\overline{PB}^2=(x-1)^2+(y-0)^2=x^2+y^2-2x+1$，

$x^2+y^2+4x+4=4(x^2+y^2-2x+1)$，得 $x^2+y^2-4x=0$，軌跡圖形是一個圓．

2. 若 $\triangle ABC$ 是由三直線 L_1：$y=0$，L_2：$3x-2y+3=0$，及 L_3：$x+y=4$ 所圍成，試求 $\triangle ABC$ 外接圓方程式．

解：L_1，L_2 解聯立交點 $A(-1,0)$；L_1，L_3 交點 $B(4,0)$；L_2，L_3 交點 $C(1,3)$；

設圓的一般式 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$．$\begin{cases} 1-d+f=0 \\ 16+4d+f=0 \\ 10+d+3e+f=0 \end{cases}$，得 $\begin{cases} d=-3 \\ e=-1 \\ f=-4 \end{cases}$，

知圓方程式 $x^2+y^2-3x-y-4=0$．

3. 已知三個圓 C_1：$x^2+y^2=1$，C_2：$(x-8)^2+y^2=1$，C_3：$x^2+(y-6)^2=1$，若圓 C 與 C_1，C_2，C_3 同時外切，試求圓 C 的圓心坐標．

解：三圓的圓心為 $A(0,0)$，$B(8,0)$，$C(0,6)$ 且半徑為 1，

因 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$，則 P 為 $\triangle ABC$ 的外心，

又$\triangle ABC$爲直角三角形，知P是$\overline{BC}$的中點$(4, 3)$．

4. 設圓C：$(x-1)^2+y^2=9$與直線L：$3x-4y+k=0$相切，試求k值．

解：圓心$Q(1, 0)$到直線L的距離$d=r=3$，$d=\dfrac{|3-0+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=3 \Rightarrow |k+3|=15$，

得$k+3=\pm 15 \Rightarrow k=-18$或$k=12$．

5. 設$P(1, 2)$爲圓C：$x^2+y^2+4x-2y-5=0$上一點，試求切點爲P的切線L之方程式．

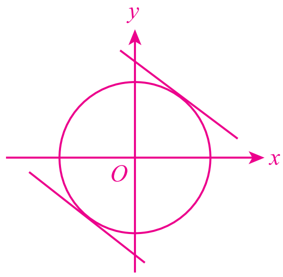
解：由切線公式L：$1\cdot x+2\cdot y+4(\dfrac{x+1}{2})-2(\dfrac{y+2}{2})-5=0$，得$L$：$3x+y-5=0$．

6. 已知圓C：$x^2+y^2=25$，試求：斜率爲$-\dfrac{3}{4}$且與圓C相切的切線．

解：設L：$3x+4y+k=0$，圓心$O(0, 0)$到L的距離爲$r=5$，

$\dfrac{|k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=5$，得$k=\pm 25$，

所求切線爲$3x+4y+25=0$與$3x+4y-25=0$．



7. 已知圓C：$(x-1)^2+(y-2)^2=13$，試求：平行直線$2x+3y+11=0$且與圓C相切的切線．

解：設L：$2x+3y+k=0$，圓心$Q(1, 2)$到L的距離$r=\sqrt{13}$，

$\dfrac{|2+6+k|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\sqrt{13}$，得$k=5$或$k=-21$，

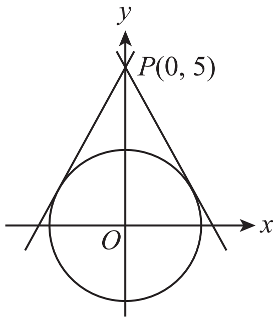
所求切線爲$2x+3y+5=0$與$2x+3y-21=0$．

8. 設$P(0, 5)$爲圓C：$x^2+y^2=5$外一點，試求通過點P且與圓C相切的切線．

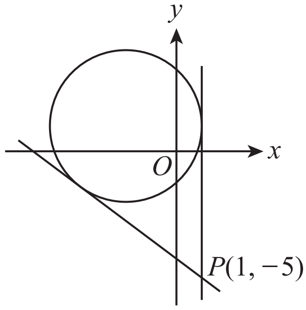
解：設切線L的斜率爲m，L：$y=mx+5$，即L：$mx-y+5=0$，

由圓心$(0, 0)$到L的距離$r=\sqrt{5}$，$\dfrac{5}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$，得$m=\pm 2$，

所求切線爲$2x+y-5=0$與$2x-y+5=0$．



9. 設 $P(1,-5)$ 為圓 C ： $(x+2)^2+(y-1)^2=9$ 外一點，試求通過點 P 且與圓 C 相切的切線．



解：設切線 L ： $y+5=m(x-1)$，即 L ： $mx-y-m-5=0$，

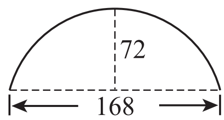
由圓心 $Q(-2,1)$ 到 L 的距離為 $r=3$，

$\dfrac{|-3m-6|}{\sqrt{m^2+1}}=3 \Rightarrow |3m+6|=3\sqrt{m^2+1}$，得 $m=-\dfrac{3}{4}$，

所求切線為 $3x+4y+17=0$ 與及鉛垂線 $x=1$ ．

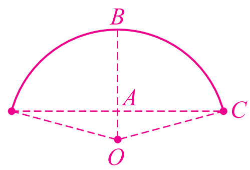
情境模擬題

1. 工匠在窗子外邊想做一個圓弧形的花臺，此花臺在窗口的中央往外伸出 72 公分，窗口的寬度是 168 公分，則此圓弧的圓半徑為幾公分？（8 分）



解：設所求圓弧之半徑為 r，

如右圖圓心 O $\Rightarrow$ $\overline{OA}=r-72$， $\overline{OC}=r$， $\overline{AC}=84$ ．



由畢氏定理，得 $\overline{OC}^2=\overline{OA}^2+\overline{AC}^2$

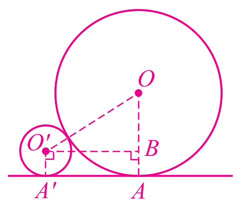
$\Rightarrow$ $r^2=(r-72)^2+84^2$ $\Rightarrow$ $144r=72^2+84^2$，

$\therefore$ $r=(\dfrac{72}{12})^2+(\dfrac{84}{12})^2=6^2+7^2=85$（公分）.

2. 桌面上有大小兩顆球相互靠在一起，已知大球的半徑為 20 公分，而小球半徑 5 公分，試求這兩顆球分別與桌面相接觸的兩點間之距離．（8 分）

解：設大小兩球之球心分別為 O 與 O'，

並設兩球與桌面之接觸點分別為 A 與 A'，如圖所示．



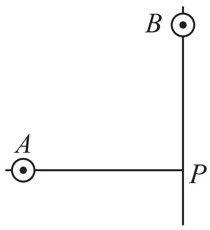
因 $\overline{OA}=20$， $\overline{O'A'}=5$

$\Rightarrow$ $\overline{OB}=\overline{OA}-\overline{AB}=\overline{OA}-\overline{O'A'}=20-5=15$，

又 $\overline{OO'}=\overline{OA}+\overline{O'A'}=20+5=25$，

故 $\overline{AA'}=\overline{O'B}=\sqrt{\overline{OO'}^2-\overline{OB}^2}=\sqrt{25^2-15^2}=\sqrt{400}=20$（公分）.

3. 在彈珠臺上有一十字形的軌道，在十字路口 P 的西方及北方各有一彈珠，以每秒 1 公分的速度往 P 移動，已知彈珠的半徑為 1 公分且中心點離 P 的距離分別為 20 公分及 18 公分，試問在幾秒後會碰撞？（9 分）



解： t 秒後 $\overline{AP}=20-t$， $\overline{BP}=18-t$，相切時 $\overline{AB}=2$，即 $\sqrt{(20-t)^2+(18-t)^2}=2$，

得 $t=18$，或 $t=20$（不合），即 18 秒後會碰撞．