2-2 線性規劃

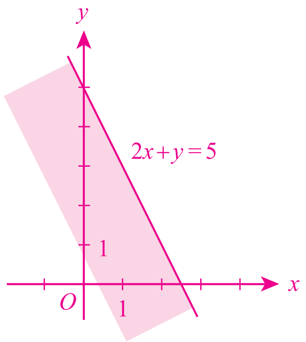
實力養成

基礎題

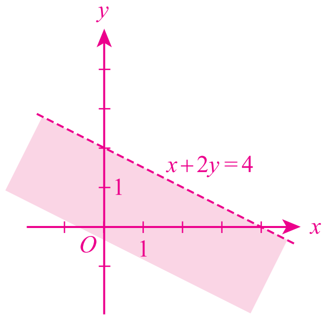
1. 在坐標平面上判別下列不等式所在的區域：

   (1) $2x+y\le 5$ ． (2) $x+2y<4$ ．

   解：(1)



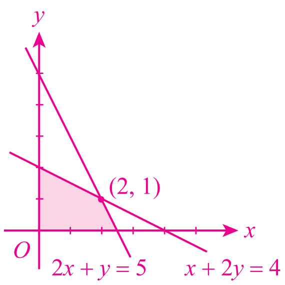
(2)



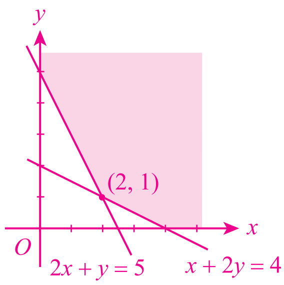
2. 在坐標平面上標示出滿足下列不等式組的區域：

   (1) $\begin{cases}2x+y\le 5\\ x+2y\le 4\\ x\ge 0,\ y\ge 0\end{cases}$ ． (2) $\begin{cases}2x+y\ge 5\\ x+2y\ge 4\\ x\ge 0,\ y\ge 0\end{cases}$ ．

   解：(1)

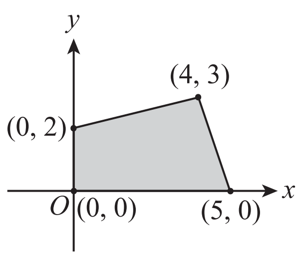


(2)



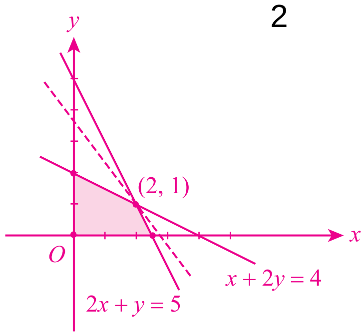
3. 試寫出不等式組，使其圖形滿足右圖（含邊界）的四邊形區域．

   解：$\begin{cases}x-4y+8\ge 0\\ 3x+y-15\le 0\\ x\ge 0,\ y\ge 0\end{cases}$



4. 設限制條件為 $\begin{cases}x+2y\le 4\\ 2x+y\le 5\\ x\ge 0,\ y\ge 0\end{cases}$ ，試用線性規劃的平行線法，

   求 $k=3x+4y$ 的最大值．



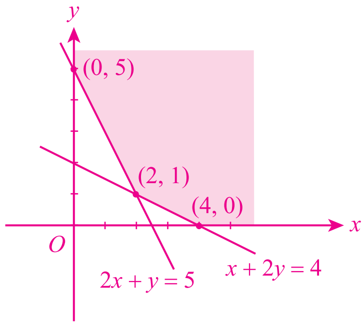
解：可行解區域如下圖：

由目標函數值變化，在 $(x, y)=(2,1)$ 時，k 有最大值 10 .

5. 設限制條件為 $\begin{cases} x+2y\geq 4 \\ 2x+y\geq 5 \\ x\geq 0,\ y\geq 0 \end{cases}$，試用線性規劃的頂點法，

求 $k=3x+4y$ 的最小值 .

解：可行解區域如下圖：

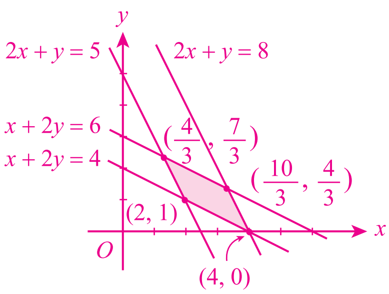


(x, y)	$k=3x+4y$
$(4,0)$	12
$(2,1)$	10
$(0,5)$	20

故 $(x, y)=(2,1)$ 時，k 有最小值 10 .

6. 試求 $k=3x+4y$ 的最小值，而限制條件為 $\begin{cases} 4\leq x+2y\leq 6 \\ 5\leq 2x+y\leq 8 \\ x\geq 0,\ y\geq 0 \end{cases}$.

解：可行解區域如下圖：



(x, y)	$k=3x+4y$
$(2,1)$	10
$(4,0)$	12
$(\frac{10}{3},\frac{4}{3})$	$\frac{46}{3}$
$(\frac{4}{3},\frac{7}{3})$	$\frac{40}{3}$

故 $(x, y)=(2,1)$ 時，k 有最小值 10 .

進階題

1. 工廠生產 A，B 兩種產品，產品每單位的原料成本，加工成本及利潤如下：

	原料成本（元）	加工成本（元）	利潤（元）
A	1	2	3
B	2	1	4

若要使原料成本不超過 4 元，加工成本不超過 5 元，則應生產多少單位可得最高利潤？

解：(1)先列出線性規劃的數學模式，

設生產 x 單位的 A 產品及 y 單位的 B 產品，

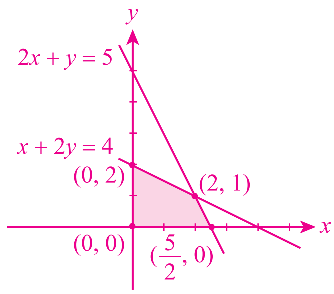
	原料成本（元）	加工成本（元）
A（x單位）	x	$2x$
B（y單位）	$2y$	y

則目標函數為 $3x+4y$，原料成本為 $x+2y$，加工成本為 $2x+y$，

得線性規劃的數學模式為

求 $k=3x+4y$ 的最大值，而限制條件為 $\begin{cases} x+2y\le 4 \\ 2x+y\le 5 \\ x\ge 0,\ y\ge 0 \end{cases}$.

(2)可行解區域如下圖：



(3)求目標函數值，

(x, y)	$k=3x+4y$
$(0,0)$	0
$(\frac{5}{2},0)$	7.5
$(2,1)$	10
$(0,2)$	8

故 $(x, y)=(2,1)$ 時，k 有最大值 10，

即生產 2 單位的 A 產品及 1 單位的 B 產品，可得最高利潤 10 元 .

2. 有 A，B 兩種飼料，每公斤的熱量，維他命及售價如下：

	熱量（千卡）	維他命（公克）	售價（元）
A	1	2	3
B	2	1	4

若每頭牛每日至少需 4 千卡熱量及 5 公克維他命，在經濟考量下，應如何調配每頭牛的飼料？

解：(1)先列出線性規劃的數學模式，

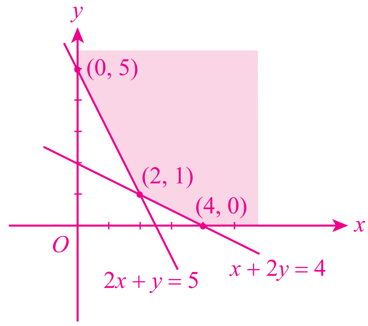
設使用 A，B 飼料各 x 公斤，y 公斤，

	熱量（千卡）	維他命（公克）	售價（元）
A（x單位）	x	$2x$	$3x$
B（y單位）	$2y$	y	$4y$

則目標函數爲 $3x+4y$，熱量爲 $x+2y$，維他命爲 $2x+y$，
得線性規劃的數學模式爲

求 $k=3x+4y$ 的最小值，而限制條件爲 $\begin{cases} x+2y\geq 4 \\ 2x+y\geq 5 \\ x\geq 0,\ y\geq 0 \end{cases}$．

(2)可行解區域如下圖：



(3)求目標函數值，

(x, y)	$k=3x+4y$
$(0,5)$	20
$(2,1)$	10
$(4,0)$	12

故 $(x, y)=(2,1)$ 時，k 有最小值 10，
即使用 A 飼料 2 公斤，B 飼料 1 公斤，飼料的成本最少爲 10 元．

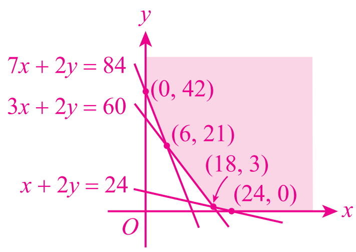
3. 爲預防禽流感，營養師吩咐雞場主人每天必須從飼料中提供至少 84 單位的營養素 A、至少 72 單位的營養素 B 和至少 60 單位的營養素 C 給他的雞群，這三種營養素可由兩種飼料中獲得，且知第一種飼料每公斤售價 5 元並含有 7 單位的營養素 A，3 單位的營養素 B 與 3 單位的營養素 C；第二種飼料每公斤售價 4 元並含有 2 單位的營養素 A，6 單位的營養素 B 與 2 單位的營養素 C．若雞場主人想以最少的飼料成本來達到雞群的營養要求，試問最少的飼料成本是多少？

解：(1)先列出線性規劃的數學模式：

	A	B	C	價格（元）
第一種飼料 x（單位）	$7x$	$3x$	$3x$	$5x$
第二種飼料 y（單位）	$2y$	$6y$	$2y$	$4y$

$$\begin{cases} 7x+2y\geq 84 \\ 3x+6y\geq 72 \\ 3x+2y\geq 60 \\ x\geq 0,\ y\geq 0 \end{cases}$$

(2)目標函數 $k=5x+4y$，



(3)求目標函數值，

(x, y)	$k=5x+4y$
$(24,0)$	120

$(18, 3)$	102
$(6, 21)$	114
$(0, 42)$	168

知 $x=18$， $y=3$ 時，飼料的成本最少爲 102 元．

4. 南北生技農場今年生產一種植物共 1 萬公斤，該植物每 200 公斤可提煉 1 公斤的中草藥，每 5 公斤可製成 1 公斤的健康食品．中草藥每公斤可獲利 5000 元，健康食品每公斤可獲利 100 元；根據市場調查每年中草藥最大需求量爲 30 公斤，健康食品最大需求量是 1800 公斤．如果南北生技農場決定提煉中草藥 x 公斤，並製成健康食品 y 公斤，設 k 爲其可獲利潤．

(1)試以 x， y 表示 k ．

(2)如果想獲得最大利潤，則 x， y 的值爲何？

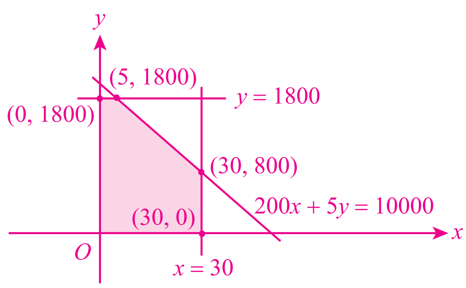
解：(1)目標函數 $k=5000x+100y$ ．

	植物重量（公斤）	利潤（元）
中草藥 x（公斤）	$200x$	$5000x$
健康食品 y（公斤）	$5y$	$100y$

(2)線性規劃的數學模式爲

$k=5000x+100y$， 而限制條件爲 $\begin{cases} 0\le x\le 30 \\ 0\le y\le 1800 \\ 200x+5y\le 10000 \end{cases}$ ，

得可行解區域如下圖：



(x, y)	$k=5000x+100y$
$(0, 0)$	0
$(30, 0)$	150000
$(30, 800)$	230000
$(5, 1800)$	205000
$(0, 1800)$	180000

得 $x=30$， $y=800$ 時有最大利潤 230000 元．

5. 某公司所生產的產品，存放在甲，乙兩倉庫分別有 50 單位、40 單位，現在市場 A、市場 B 分別的需求量是 20 單位、30 單位，右表是各倉庫運輸到各市場的每單位運輸成本：

	市場 A	市場 B
倉庫甲	500 元	450 元
倉庫乙	400 元	300 元

在滿足 A， B 市場的需求下，最節省的運輸成本爲 <u>18000</u> 元．【92 數乙】

解：(1)先列出線性規劃的數學模式，

設市場 A， B 來自倉庫甲的產品各 x， y 單位，則目標函數

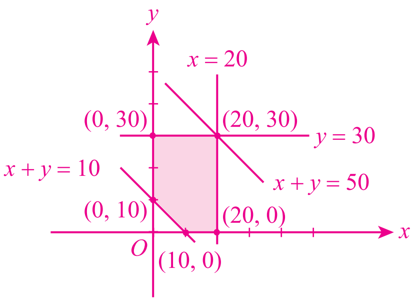
	市場 A	市場 B
倉庫甲	x	y
倉庫乙	$20-x$	$30-y$

$k=500x+400(20-x)+450y+300(30-y)$

$=100x+150y+17000$，

而限制條件爲 $\begin{cases} x\ge 0,\ 20-x\ge 0 \\ y\ge 0,\ 30-y\ge 0 \\ x+y\le 50 \\ 50-(x+y)\le 40 \end{cases}$，即 $\begin{cases} 0\le x\le 20 \\ 0\le y\le 30 \\ 10\le x+y\le 50 \end{cases}$．

(2)可行解區域如下圖：



(3)求目標函數值，

(x, y)	$k=100x+150y+17000$
$(10, 0)$	18000
$(20, 0)$	19000
$(20, 30)$	23500
$(0, 30)$	21500
$(0, 10)$	18500

故 $(x, y)=(10, 0)$ 時， k 有最小值 18000 元．

6. 建築公司在房市熱絡時推出甲、乙兩型熱門預售屋．企劃部門的規劃如下：甲型屋每棟地價成本爲 500 萬元，建築費用爲 900 萬元，乙型屋每棟地價成本爲 200 萬元，建築費用爲 1500 萬元，公司在資金部分限制地價總成本上限爲 3500 萬元，所有建築費用的上限爲 1 億 2000 萬元；無論甲型或乙型售出，每棟獲利皆爲 500 萬元，假設推出的預售屋皆可售出，請問推出甲、乙兩型預售屋各幾棟，公司才可得到最大利潤．

解：設推出甲型預售屋 x 棟，乙型預售屋 y 棟，

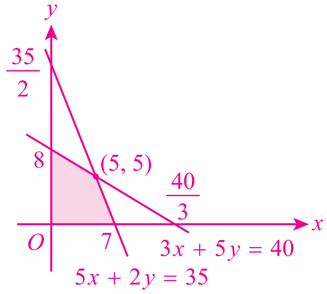
	成本（萬）	建築費用（萬）	利潤（萬）
甲型屋 x（棟）	$500x$	$900x$	$500x$
乙型屋 y（棟）	$200y$	$1500y$	$500y$

得限制條件爲

$\begin{cases} 500x+200y\le 3500 \\ 900x+1500y\le 12000 \\ x\ge 0,\ y\ge 0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} 5x+2y\le 35 \\ 3x+5y\le 40 \\ x\ge 0,\ y\ge 0 \end{cases}$，

目標函數 $k=500(x+y)$，

可行解區域如下圖：



(x, y)	$k=500(x+y)$
$(0, 0)$	0
$(7, 0)$	3500
$(5, 5)$	5000
$(0, 8)$	4000

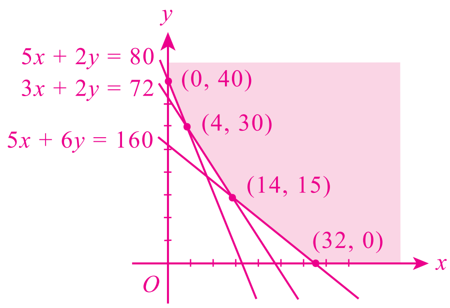
因此推出甲型預售屋 5 棟，乙型預售屋 5 棟時，公司可得最大利潤 5000 萬元．

7. 某歌唱訓練班根據以往的經驗得知：每花 10 萬元在報章雜誌上替歌手打廣告可以提升歌手的形象指數 5 點，知名度指數 10 點；反之，若是在電臺上，同樣花 10 萬元替歌手打廣告，則可以提升歌手的形象指數 6 點，知名度指數 4 點．根據市場調查發現成爲名歌星的形象指數至少 160 點，知名度指數亦至少 160 點，而且綜合指數（形象指數與知名度指數的和）至少 360 點．試問：歌唱訓練班要讓一位新歌手（假設其形象指數與知名度指數皆爲 0）成爲名歌星至少應該花多少廣告費？這些廣告費報章雜誌與電臺應各分配多少，效果最好．

解：(1)設花費在報章雜誌 $10x$ 萬元，電臺 $10y$ 萬元，

得 $\begin{cases}5x+6y\ge 160\\10x+4y\ge 160\\15x+10y\ge 360\\x\ge 0,\ y\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5x+6y\ge 160\\5x+2y\ge 80\\3x+2y\ge 72\\x\ge 0,\ y\ge 0\end{cases}$．

(2)可行解區域如下圖：



(3)求目標函數值，

(x, y)	$k=10(x+y)$
$(0, 40)$	400
$(4, 30)$	340
$(14, 15)$	290
$(32, 0)$	320

故報章雜誌花費 140 萬元，電臺花費 150 萬元時，廣告花費最少爲 290 萬元．