

2-1 直線方程式及其圖形

實力養成

基礎題

1. 試問下列哪一條直線的斜率大於 0？

(1) L_1 通過 (3, 2), (5, 7) (2) L_2 通過 (2, 1), (-1, 5)

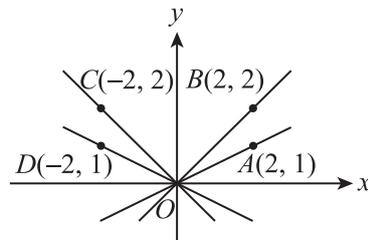
(3) L_3 通過 (1, 2), (3, 2) (4) L_4 通過 (3, 2), (3, 5) .

解：(1) L_1 的斜率 $m_1 = \frac{7-2}{5-3} = \frac{5}{2}$. (2) L_2 的斜率 $m_2 = \frac{5-1}{-1-2} = -\frac{4}{3}$.

(3) L_3 的斜率 $m_3 = \frac{2-2}{3-1} = 0$. (4) L_4 的斜率不存在 . 故選(1) .

2. 如右圖，設直線 OA ，直線 OB ，直線 OC ，直線 OD 的斜率分別為 m_1 ， m_2 ， m_3 ， m_4 ，試問 m_1 ， m_2 ， m_3 ， m_4 的值何者最小？

(1) m_1 (2) m_2 (3) m_3 (4) m_4 .



解： $m_1 = \frac{1}{2}$ ， $m_2 = 1$ ， $m_3 = -1$ ， $m_4 = -\frac{1}{2}$ ，

得 $m_2 > m_1 > m_4 > m_3$ ，故選(3) .

3. 下列方程組中，何者方程組無解？

(1) $\begin{cases} x+2y=4 \\ 3x+y=7 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 5x+4y=7 \\ 3x+7y=11 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 4x+6y=5 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 4x+6y=2 \end{cases}$.

解：(1) $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{1}$ ，方程組有唯一解 . (2) $\frac{5}{3} \neq \frac{4}{7}$ ，方程組有唯一解 .

(3) $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} \neq \frac{1}{5}$ ，方程組無解 . (4) $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ，方程組有無窮多解 . 故選(3) .

4. 試求下列直線方程式：

(1) 通過 $A(3, 1)$ ，斜率為 $\frac{3}{4}$. (2) 通過 $A(3, 1)$ ，斜率為 $-\frac{3}{2}$.

解：(1) 方程式 $y-1=\frac{3}{4}(x-3)$ ，整理得 $3x-4y-5=0$ 。

(2) 方程式 $y-1=-\frac{3}{2}(x-3)$ ，整理得 $3x+2y-11=0$ 。

5. 試求下列直線方程式：

(1) 斜率為 $\frac{2}{3}$ ， y 截距為 1。 (2) 斜率為 $-\frac{5}{3}$ ， y 截距為 -2。

解：(1) 方程式 $y=\frac{2}{3}x+1$ ，得 $2x-3y+3=0$ 。

(2) 方程式 $y=-\frac{5}{3}x-2$ ，得 $5x+3y+6=0$ 。

6. 試求下列直線方程式：

(1) x 截距為 3， y 截距為 5。 (2) x 截距為 -3， y 截距為 -5。

解：(1) 方程式 $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$ ，即 $5x+3y-15=0$ 。

(2) 方程式 $\frac{x}{-3}+\frac{y}{-5}=1$ ，即 $5x+3y+15=0$ 。

進階題

1. 設 $L: x+2y+7=0$,

(1) 通過 (3,1) 且與 L 平行的直線。 (2) 通過 (3,1) 且與 L 垂直的直線。

解：(1) 直線的方程式為 $x+2y-5=0$ 。

(2) 直線的方程式為 $2x-y-5=0$ 。

2. 已知平行四邊形的兩邊在 $x+3y=0$ 與 $x-3y=0$ 上面，一頂點為 (4,3)，試求另外兩邊所在直線的方程式。

解：與 $x+3y=0$ 平行的直線為 $x+3y-13=0$ ，

與 $x-3y=0$ 平行的直線為 $x-3y+5=0$ 。

3. 已知 $\triangle ABC$ 中， $A(2,1)$ ， $B(6,5)$ ， $C(3,8)$ ，試求：

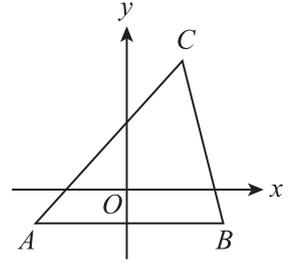
(1) 直線 AB 的方程式。 (2) \overline{AB} 邊上的高，所在直線的方程式。

解：(1)直線 AB 的斜率為 1，得直線 AB 的方程式為 $x-y-1=0$.

(2)高所在的直線斜率為 -1 ，通過 $(3,8)$ ，得直線方程式為 $x+y-11=0$.

4. 如右圖，若三角形 ABC 中，直線 AB ，直線 BC ，直線 CA 的斜率分別為 m_1 ， m_2 ， m_3 ，請比較 m_1 ， m_2 ， m_3 的大小 .

解： $m_1=0$ ， $m_2<0$ ， $m_3>0$ ，得 $m_3>m_1>m_2$.

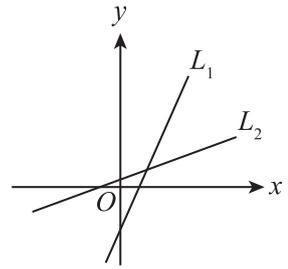


5. 右圖為兩直線 $L_1: x-ay-1=0$ ， $L_2: x-by+1=0$ 的圖形，
(1)試判別 a ， b 的正負 . (2)試判別 a ， b 的大小 .

解： L_1 ， L_2 的斜率分別為 $\frac{1}{a}$ ， $\frac{1}{b}$ ，

(1) $\frac{1}{a}>0$ ， $\frac{1}{b}>0$ ，得 $a>0$ ， $b>0$.

(2) $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}>0$ ，得 $b>a$.

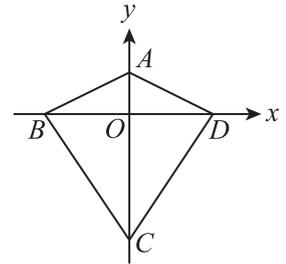


6. 右圖四邊形中，已知 $\overline{OB}=\overline{OD}$ ，且直線 AB ，直線 BC ，直線 CD ，直線 DA 的斜率分別為 m_1 ， m_2 ， m_3 ， m_4 ，

(1)比較 m_1 ， m_2 ， m_3 ， m_4 的大小 .

(2)判別 m_1+m_2 的正負 .

解：(1) $m_3>m_1>m_4>m_2$. (2) $m_1+m_2<0$.



7. 有一直角三角形三邊的斜率分別為 m_1 ， m_2 ， m_3 ，且 $m_1>m_2>m_3$ ，

(1)試判別 m_1 的正負 . (2)試判別 m_3 的正負 .

解：直角三角形中，其中直角兩邊的斜率乘積為 -1 ，且可知必為一正一負 .

(1)至少有一正數，知 $m_1>0$.

(2)至少有一負數，知 $m_3<0$.

8. 右圖為三直線 $x-y-1=0$ ， $2x+y+2=0$ 與 $x-3y+1=0$ 的圖形，

(1)試判別 L_2 的方程式 . (2)試判別 L_3 的方程式 .

解：(1) L_2 的斜率為負，得 $L_2: 2x+y+2=0$.

(2) L_3 的斜率小於 L_1 的斜率，得 $L_3: x-3y+1=0$.

9. 三直線 $L_1 : x - y - 1 = 0$, $L_2 : x - 3y + 1 = 0$, $L_3 : ax - y - 3 = 0$,

(1) 若三直線相交於同一點 P , 試求 a 值.

(2) 若三直線圍成一直角三角形, 試求 a 值.

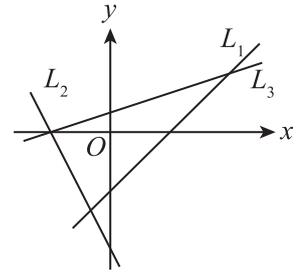
解: (1) L_1 與 L_2 交於 $P(2, 1)$, 代入 L_3 得 $2a - 4 = 0$, 故 $a = 2$.

$$(2) m_1 = 1, m_2 = \frac{1}{3}, m_3 = a,$$

$$m_1 \cdot m_3 = -1 \text{ 或 } m_2 \cdot m_3 = -1, \text{ 得 } a = -1 \text{ 或 } a = -3,$$

而三直線相交於同一點時 $a = 2$,

知所求 a 值為 $a = -1$ 或 $a = -3$.



情境模擬題

1. 將一張畫有平面坐標系的紙摺疊一次, 發現點 $A(2, 0)$ 對到點 $B(0, 4)$, 試求點 $P(4, 6)$ 所對到的點 Q 的坐標. (8 分)

解: 因 \overline{AB} 的中垂線 $L : x - 2y + 3 = 0$ 是坐標平面上的摺線,

故自點 $P(4, 6)$ 作 L 的對稱點為 $Q(6, 2)$.

2. 某民宿共有三棟, B 棟在 A 棟東方 120 公尺, 而 C 棟在 A 棟北方 50 公尺, 有間咖啡廳到三棟都一樣遠, 試求咖啡廳到 A 棟的距離. (8 分)

解: 咖啡廳 P 在 $\triangle ABC$ 的外心, 即 \overline{BC} 的中點,

$$\text{由 } \overline{AP} = \overline{BP} = \overline{CP} = \frac{1}{2} \overline{BC} = 65 \text{ (公尺).}$$

3. 圖書館前的階梯共有 23 階, 如果甲每次都跨 2 階或 3 階, 已知甲一共移動 10 次時剛好走完這 23 階, 試問甲共走了幾次的一次 3 階? (9 分)

解: 設一次 2 階有 x 次, 一次 3 階有 y 次,

$$\text{則 } \begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + 3y = 23 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{知共走了 3 次的一次 3 階.}$$