1-5　三角測量

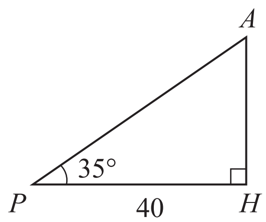
基礎題

1. 三角函數值表，$\cos 9°20' = 0.9868$，$\cos 9°30' = 0.9863$，根據內插法求得 $\cos 9°24'$ 的值為(1) 0.9867　(2) 0.9866　(3) 0.9865　(4) 0.9864．

   解： 由內插法知

   $$\cos 9°24' = 0.9868 + (-0.0005) \times 0.4$$
   $$= 0.9868 - 0.0002$$
   $$= 0.9866,$$

2. 有一高塔 $\overline{AH}$，從距離塔底 40 公尺處的 P 點，測得塔頂 A 的仰角為 $35°$，已知 $\sin 35° = 0.5736$，$\tan 35° = 0.7002$，則此塔的高度最接近
   (1) 23 公尺　(2) 25 公尺　(3) 28 公尺　(4) 31 公尺．



   解： 因 $\overline{PH} = 40$，$\tan 35° = \dfrac{\overline{AH}}{40}$，

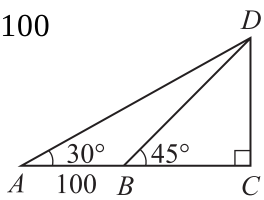
   得 $\overline{AH} = 40 \cdot \tan 35° = 40 \times 0.7002 \approx 28$（公尺），

3. 河流的左岸 A 點正對河流右岸 B 點，由點 A 往河邊移動 50 公尺後到達 P 點，在 P 點測量 $\angle APB = 58°$，已知 $\tan 58° \approx 1.6000$，則河的寬度 $\overline{AB}$ 最接近
   (1) 40 公尺　(2) 60 公尺　(3) 70 公尺　(4) 80 公尺．

   解： 因 $\overline{AP} = 50$，$\tan 58° = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \dfrac{\overline{AB}}{50}$，

   得 $\overline{AB} = 50 \cdot \tan 58° = 50 \cdot 1.6000 = 80$（公尺），

4. 一人於 A 點測得塔頂的仰角為 $30°$，此人向塔的方向前進 100 公尺到 B 點，又測得塔頂的仰角為 $45°$，試求此塔的高．

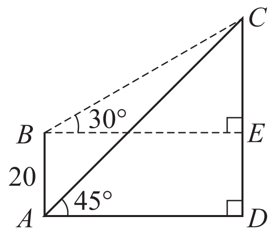


   解： 設塔高 $\overline{CD} = h$，則 $\overline{BC} = h$，$\overline{AC} = \sqrt{3}h$，

   得 $\overline{AB} = (\sqrt{3} - 1)h$，即 $(\sqrt{3} - 1)h = 100$，

   $h = 50(\sqrt{3} + 1)$（公尺）．

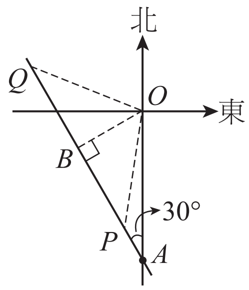
5. 一人於樓底 A 測對面一塔頂 C 的仰角爲 $45°$，爬上樓頂 B 再測得塔頂 C 的仰角爲 $30°$，已知樓高 $\overline{AB}=20$ 公尺，試求對面塔的高度．



解：設塔高 $\overline{CD}=h$，則 $\overline{AD}=h$，又 $\overline{BE}=\overline{CD}=h$，

得 $\overline{CE}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}h$，$\overline{CD}=\overline{CE}+\overline{ED}$，即 $h=\dfrac{\sqrt{3}}{3}h+20$，得 $h=10(3+\sqrt{3})$（公尺）.

6. 根據氣象預報，一颱風下午 2 時的中心位置在<u>鵝鑾鼻</u>燈塔正南方 300 公里處，暴風半徑爲 250 公里，時速是 50 公里，朝北 $30°$ 西等速前進．假設其速度，方向，半徑均不變，試求<u>鵝鑾鼻</u>燈塔在暴風圈內前後共多少小時？



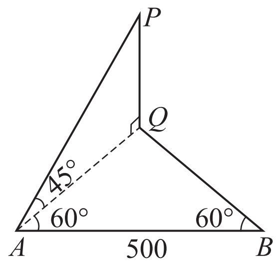
解：若中心爲 P 時進入暴風圈，中心爲 Q 時離開，

因 $\overline{OB}=150$，$\overline{OP}=250$，得 $\overline{BP}=200$，

又 $\overline{PQ}=2\overline{BP}=400$，知經歷的時間爲 $\dfrac{400}{50}=8$（小時）.

進階題

1. <u>大明</u>隔河測一塔高，在 A 點觀測塔時，塔的方向爲東偏北 $60°$，塔頂的仰角爲 $45°$，<u>大明</u>自 A 點向東行 500 公尺到達 B 點，塔的方向變成西偏北 $60°$，試求塔的高度．



解：因 $\triangle ABQ$ 爲正三角形，$\overline{AQ}=\overline{AB}=500$，

又 $\triangle APQ$ 中 $\overline{PQ}=\overline{AQ}=500$，

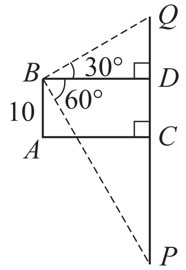
得塔的高度 $\overline{PQ}=500$（公尺）.

2. 某建築物有一塔，塔上有一旗桿，已知旗桿長爲 2 公尺，今在平地上 A 點測得建築物的頂端 B，塔頂 C 和旗桿頂 D 的仰角分別爲 $45°$，$60°$ 和 $75°$，試求建築物的高度．

解：設建築物的高 $\overline{BE}=h$，則 $\overline{AE}=h$，$\overline{CE}=\sqrt{3}h$，$\overline{DE}=(2+\sqrt{3})h$，

而 $\overline{CD}=\overline{DE}-\overline{CE}$，即 $2=(2+\sqrt{3})h-\sqrt{3}h$，得 $h=1$（公尺）.

3. 大明在距離水面 10 公尺高的河堤上散步，突然發現水中有一小白鷺的倒影，此時測得的俯角爲$60°$，抬頭看到天空中小白鷺的仰角爲$30°$，若人的高度忽略不計，試求此時小白鷺離水面的高度．

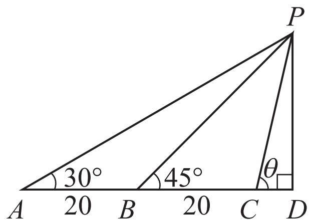


解：設 $\overline{QD}=d$，則 $\overline{BD}=\sqrt{3}d$，$\overline{PD}=3d$，

由 $\overline{PC}=\overline{QC}$，即 $3d-10=d+10$，得 $d=10$，

知高度 $\overline{QC}=d+10=20$（公尺）.

4. 大明於 A 點測得一直立旗桿頂的仰角爲$30°$，他向旗桿方向前進 20 公尺到 B 點，結果仰角變爲$45°$，再繼續前進 20 公尺到 C 點，若在 C 點的仰角爲 θ，試求 $\tan\theta$ 之值．



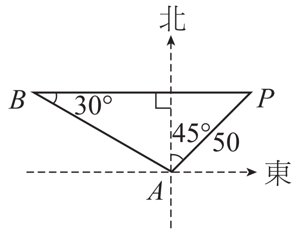
解：設旗桿高爲 h，則 $\overline{AD}=\sqrt{3}h$，$\overline{BD}=h$，

得 $\overline{AB}=(\sqrt{3}-1)h$，即 $20=(\sqrt{3}-1)h$，

知 $h=10(\sqrt{3}+1)$，又 $\overline{CD}=\overline{BD}-20=10(\sqrt{3}-1)$，

故 $\tan\theta=\dfrac{h}{\overline{CD}}=\dfrac{10(\sqrt{3}+1)}{10(\sqrt{3}-1)}=2+\sqrt{3}$.

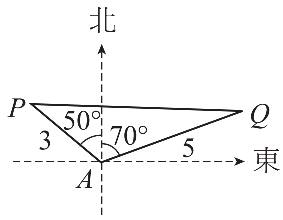
5. 大明自點 A 出發，先往東北方前進 50 公尺後轉往西方向行進到 B 點，測得 A 點在他的東偏南$30°$，試問此時 A，B 兩點的距離．



解：$\triangle ABP$ 中，$\angle A=105°$，$\angle B=30°$，$\angle P=45°$，

由正弦定理 $\dfrac{50}{\sin 30°}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin 45°}$，得 $\overline{AB}=\dfrac{50}{\sin 30°}\times\sin 45°=50\sqrt{2}$（公尺）.

6. 一船在海上沿直線前進，大明在岸上 A 點先測得船在北$50°$西，距離爲 3 公里，一小時後於 A 點再測，知船在北$70°$東，距離爲 5 公里，試求船速每小時多少公里？

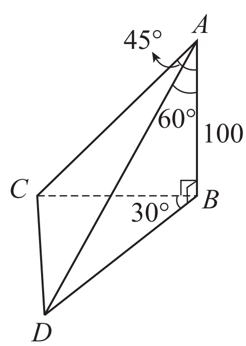


解：$\triangle APQ$ 中，$\angle PAQ=120°$，$\overline{AP}=3$，$\overline{AQ}=5$，

由餘弦定理 $\overline{PQ}^2=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cdot(-\dfrac{1}{2})=49$，$\overline{PQ}=7$，

船速每小時 7 公里．

7. 在塔頂 A 處，測得甲船在塔底 B 正西方的 C 點且俯角爲 $45°$，乙船在塔底 B 西 $30°$ 南的 D 點且俯角爲 $30°$．已知塔高 $\overline{AB}$ 爲 100 公尺，試求甲乙兩船的距離．



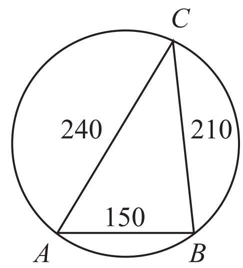
解：因塔高 $\overline{AB}=100$，

得 $\overline{BC}=100$，$\overline{BD}=100\sqrt{3}$ 且 $\angle CBD=30°$，

由餘弦定理 $\overline{CD}^2=\overline{BC}^2+\overline{BD}^2-2\overline{BC}\cdot\overline{BD}\cdot\cos 30°$，

$\overline{CD}^2=100^2+(100\sqrt{3})^2-2\cdot 100\cdot 100\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=10000$，得 $\overline{CD}=100$（公尺）.

8. 某離島村落有 A，B，C 三戶人家，已知 $\overline{AB}=150$ 公尺，$\overline{AC}=240$ 公尺，$\overline{BC}=210$ 公尺，現在想開一口井 P，且井 P 到三戶人家等距離，試求 $\overline{PA}$ 的距離．

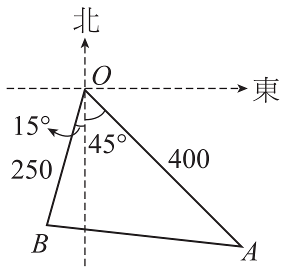


解：由海龍公式，$s=300$，

$\triangle ABC$ 的面積 $=\sqrt{300\cdot 150\cdot 60\cdot 90}=9000\sqrt{3}$，

$$R=\frac{150\times 240\times 210}{4\times 9000\sqrt{3}}=70\sqrt{3}\text{（公尺）}.$$

9. 已知某颱風自上午 9 時到下午 7 時共 10 小時間，颱風的中心位置，由恆春東南方 400 公里直線等速移開，到達恆春南 $15°$ 西的 250 公里處，試問颱風移動的平均速度爲每小時多少公里？



解：在 $\triangle OAB$ 中，$\angle AOB=60°$，$\overline{OA}=400$，$\overline{OB}=250$，

由餘弦定理 $\overline{AB}^2=400^2+250^2-2\cdot 400\cdot 250\cdot\dfrac{1}{2}=122500$，

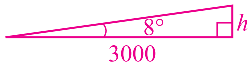
$\overline{AB}=350$，得平均速度爲 $350\div 10=35$（公里）.

情境模擬題

1. 某機場基於飛航安全考量，限制機場附近建築物從機場中心地面到建築物頂樓的仰角不得超過 $8°$．某建築公司打算在離機場中心 3 公里且地表高度和機場中心一樣高的地方蓋一棟平均每樓層高 5 公尺的大樓，在符合機場的限制規定下，該大樓在地面以上最多可以蓋 ＿84＿ 層樓．

（參考數據：$\sin 8°\approx 0.1392$，$\cos 8°\approx 0.9903$，$\tan 8°\approx 0.1405$）

解：設最高可蓋 h 公尺，



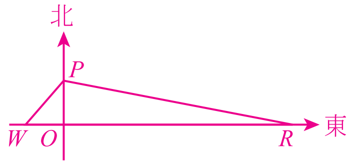
$\tan 8° = \dfrac{h}{3000}$，得 $h = 3000 \cdot \tan 8° \approx 421.5$（公尺）；

若可蓋 n 層樓，因每層樓高 5 公尺，$5n \le 421.5$，得 $n \le 84$（層）.

2. 廣場上插了一支紅旗與一支白旗，小明站在兩支旗子之間，利用手邊的儀器，小明測出他與正東方紅旗間的距離爲他與正西方白旗間距離的 6 倍；小明往正北方走了 10 公尺之後再測量一次，發現他與紅旗的距離變成他與白旗距離的 4 倍．試問紅白兩旗之間的距離最接近下列哪個選項？

(1) 60 公尺　(2) 65 公尺　(3) 70 公尺　(4) 75 公尺　(5) 80 公尺．

解：設紅旗與白旗分別在 R，W 的位置，



小明自點 O 向北走 10 公尺到點 P，知 $\overline{OP} = 10$，

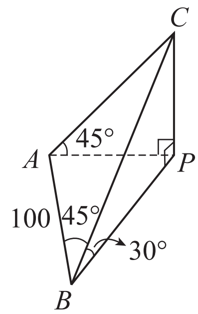
設 $\overline{OW} = k$，得 $\overline{OR} = 6k$，$\overline{PR} = \sqrt{(6k)^2 + 10^2}$，

$\overline{PW} = \sqrt{k^2 + 10^2}$，因 $\overline{PR} = 4\overline{PW}$，得 $k^2 = 75$，$k = 5\sqrt{3}$，

知紅白兩旗的距離爲 $\overline{RW} = 7k = 35\sqrt{3} \approx 60.62 \approx 61$（公尺），

$\therefore$ 最接近的選項爲 60 公尺，

3. 在 A 點測得塔頂 C 的仰角爲 45°，在 B 點測得塔頂 C 的仰角爲 30°，$\angle ABC = 45°$，且 $\overline{AB} = 100$ 公尺，試求塔高．



解：設塔高 $\overline{CP} = h$，得 $\overline{AC} = \sqrt{2}h$，$\overline{BC} = 2h$，

在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC = 45°$，

由餘弦定理知 $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \cos 45°$，

$2h^2 = 100^2 + 4h^2 - 2 \cdot 100 \cdot 2h \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$h^2 - 100\sqrt{2}h + 5000 = 0$，得 $h = 50\sqrt{2}$（公尺）.