1-4　差角公式

基礎題

1. 已知 $90° < \theta < 180°$，且 $\sin\theta = \dfrac{3}{5}$，試問 $\tan\dfrac{\theta}{2}$ 的值是

(1) $\dfrac{1}{3}$　(2) $\dfrac{1}{2}$　(3) 2　(4) 3．

解：$\sin\theta = \dfrac{3}{5}$，$\cos\theta = -\dfrac{4}{5}$，

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{4}{5}} = 3,$$

2. 請善用半角公式，試問 $\tan 22.5°$ 的值是

(1) $\sqrt{2}-1$　(2) $\sqrt{2}+1$　(3) $2-\sqrt{3}$　(4) $2+\sqrt{3}$．

解：因 $\sin 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\tan 22.5° = \dfrac{\sin 45°}{1+\cos 45°} = \dfrac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$，

3. 設 $A = 2\sin 10°\cos 10°$，$B = \cos^2 10° - \sin^2 10°$，$C = 1-2\sin^2 10°$，

$D = 4\cos^3 10° - 3\cos 10°$，試問 A，B，C，D 中最小值是

(1) A　(2) B　(3) C　(4) D．

解：由倍角公式知

$A = \sin 20°$，$B = \cos 20° = \sin 70°$，$C = \cos 20° = \sin 70°$，$D = \cos 30° = \sin 60°$，

得 $A < D < B = C$．

4. (1)試求 $\cos 53°\cos 37° - \sin 53°\sin 37°$ 的值．

(2)試求 $\cos 73°\cos 28° + \sin 73°\sin 28°$ 的值．

解：(1)原式 $= \cos(53°+37°) = \cos 90° = 0$．

(2)原式 $= \cos(73°-28°) = \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

5. 設 α，β 皆爲銳角且 $\tan\alpha = \dfrac{1}{8}$，$\tan\beta = \dfrac{7}{9}$，試求：

(1) $\tan(\alpha+\beta)$．　(2) $\alpha+\beta$．

解：(1) 由正切的和角公式，$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{1}{8}+\frac{7}{9}}{1-\frac{1}{8}\cdot\frac{7}{9}}=1$ ．

(2)因 $0°<\alpha<90°$， $0°<\beta<90°$，得 $0°<\alpha+\beta<180°$，故 $\alpha+\beta=45°$ ．

6. 已知 $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$， $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$，試求：

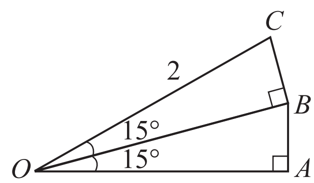
(1) $\sin 2\theta$ ． (2) $\cos 3\theta$ ．

解：(1) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{24}{25}$ ．

(2) $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta=-\dfrac{44}{125}$ ．

進階題

1. 右圖是由二個直角三角形堆疊而成，且 $\overline{OC}=2$，試求直角 $\triangle OAB$ 的高 $\overline{AB}$ ．



解： $\overline{AB}=\overline{OB}\cdot\sin15°=\overline{OC}\cdot\cos15°\cdot\sin15°=2\sin15°\cos15°=\sin30°=\dfrac{1}{2}$ ．

2. 設 θ 爲銳角且 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$，試求 $\sin(\theta+45°)$ 之値．

解：因 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$， $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$，

$\sin(\theta+45°)=\sin\theta\cos45°+\cos\theta\sin45°=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$ ．

3. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\cos A=\dfrac{1}{7}$， $\cos B=\dfrac{11}{14}$，試求：

(1) $\cos(A+B)$ ． (2) $\angle A+\angle B$ ．

解： $\cos A=\dfrac{1}{7}$時， $\sin A=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$， $\cos B=\dfrac{11}{14}$時， $\sin B=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$，

(1) $\cos(A+B)=\dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{11}{14}-\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\cdot\dfrac{5\sqrt{3}}{14}=-\dfrac{1}{2}$ ．

(2)因 $0<\angle A+\angle B<180°$，得 $\angle A+\angle B=120°$ ．

4. 已知 $0<x<180°$，解方程式 $\sin 2x=\sin x$ ．

解：因 $\sin 2x=2\sin x\cos x$，即 $2\sin x\cos x=\sin x$， $\sin x(2\cos x-1)=0$，

$\therefore$ $\sin x=0$ 或 $\cos x=\dfrac{1}{2}$，

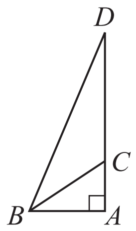
而 $0<x<180°$時， $\sin x>0$，得 $\cos x=\dfrac{1}{2}$，知 $x=60°$ ．

5. 已知$\triangle ABC$中，$\tan A\cdot\tan B=1$，
(1)試求$\cos(A+B)$．　(2)判別$\triangle ABC$的形狀．

解：(1) $\dfrac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}=1$，即$\cos A\cos B-\sin A\sin B=0$，得$\cos(A+B)=0$．

(2) $\angle A+\angle B=90°$，知$\angle C=90°$，　故$\triangle ABC$爲直角三角形．

6. 如右圖，直角三角形ABD中，$\angle A$爲直角，C爲$\overline{AD}$邊上的點．已知$\overline{BC}=6$，$\overline{AB}=5$，$\angle ABD=2\angle ABC$，則$\overline{BD}=$ $\underline{\dfrac{90}{7}}$．【99學測】



解：$\angle ABC=\angle CBD=\theta$，$\angle ABD=2\theta$，

由$\overline{BC}=6$，$\overline{AB}=5$，知$\cos\theta=\dfrac{5}{6}$，

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=\dfrac{7}{18}$，

$\cos 2\theta=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}}=\dfrac{7}{18}$，得$\overline{BD}=\dfrac{90}{7}$．

7. 坐標平面上$A(\cos 12°,\sin 12°)$，$B(\sin 18°,\cos 18°)$，試求$\overline{AB}$的長．

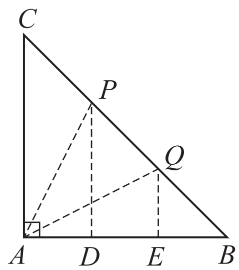
解：$\overline{AB}^2=(\cos 12°-\sin 18°)^2+(\sin 12°-\cos 18°)^2$

$=(\cos^2 12°+\sin^2 12°)+(\sin^2 18°+\cos^2 18°)-2(\cos 12°\sin 18°+\sin 12°\cos 18°)$

$=1+1-2\sin(18°+12°)=1$，

知$\overline{AB}=1$．

8. 設$\triangle ABC$爲一等腰直角三角形，$\angle BAC=90°$，若P，Q爲斜邊$\overline{BC}$的三等分點，試求$\tan\angle PAQ$的值．



解：設$\angle PAD=\alpha$，$\angle QAE=\beta$，

在$\triangle PAD$中，$\overline{PD}=2\overline{AD}$，知$\tan\alpha=2$，

在$\triangle QAE$中，$\overline{AE}=2\overline{QE}$，知$\tan\beta=\dfrac{1}{2}$，

$\angle PAQ=\alpha-\beta$，$\tan\angle PAQ=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{2-\frac{1}{2}}{1+2\cdot\frac{1}{2}}=\dfrac{3}{4}$．

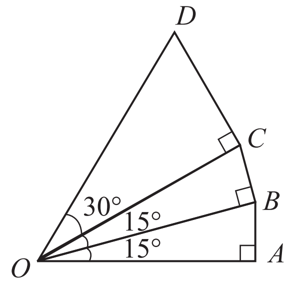
9. $\triangle ABC$爲邊長爲5的正三角形，P點在三角形內部，若線段長度$\overline{PB}=4$且$\overline{PC}=3$，則$\cos\angle ABP=$ $\underline{0.92}$

（四捨五入到小數點後第二位，$\sqrt{2}$的近似值是1.414，$\sqrt{3}$的近似值是1.732）．

解： $\angle PBC=\theta$時， $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$， $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$， $\angle ABP=60°-\theta$，

$\cos\angle ABP=\cos(60°-\theta)=\cos60°\cos\theta+\sin60°\sin\theta=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{5}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{3}{5}\approx0.4+0.52=0.92$ ．

情境模擬題

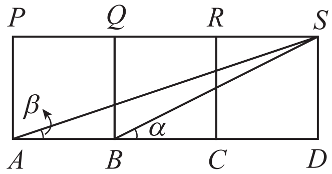


1. 右圖是由三個直角三角形堆疊而成的圖形，且 $\overline{OD}=8$ ．試求直角三角形 OAB 的高 $\overline{AB}$ ．

   解： $\overline{AB}=\overline{OB}\cdot\sin15°=\overline{OC}\cdot\cos15°\cdot\sin15°$

   $=\overline{OD}\cdot\cos30°\cdot\cos15°\cdot\sin15°$

   $=8\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\sin30°=\sqrt{3}$ ．

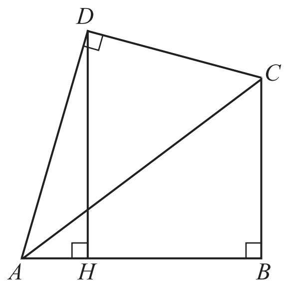


2. 右圖中，四邊形 $ABQP$ ， $BCRQ$ ， $CDSR$ 都是正方形，試求：
   (1) $\tan(\alpha+\beta)$ ．　(2) $\alpha+\beta$ ．（8 分）

   解： (1) $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$， $\tan\beta=\dfrac{1}{3}$，

   由正切的和角公式 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1$ ．

   (2)因 $0°<\alpha<90°$， $0°<\beta<90°$， 得 $0°<\alpha+\beta<180°$， 故 $\alpha+\beta=45°$ ．



3. 已知$\triangle ABC$中，$\angle B=90°$， $\overline{AB}=4$， $\overline{BC}=3$，若以 $\overline{AC}$ 爲軸，將$\triangle ABC$翻轉得$\triangle ADC$，則 D 到 $\overline{AB}$ 的距離 $\overline{DH}=$ $\underline{\dfrac{96}{25}}$ ．

   解： 設 $\angle BAC=\theta$， 則 $\angle BAD=2\theta$，

   直角$\triangle ABC$中， $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$， $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$， 得 $\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{24}{25}$，

   $\overline{DH}=\overline{AD}\cdot\sin2\theta=\overline{AB}\cdot\sin2\theta=\dfrac{96}{25}$ ．