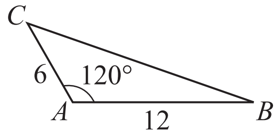
1-3　正弦定理、餘弦定理

基礎題

1. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle CAB=120°$，$\overline{AB}=12$，$\overline{AC}=6$，試問 $\triangle ABC$ 的面積爲

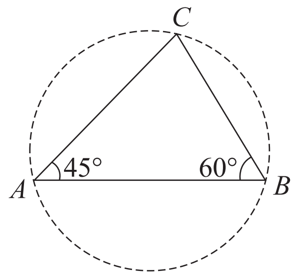


(1) 18　(2) $18\sqrt{3}$　(3) 36　(4) $36\sqrt{3}$ ．

解：由面積公式，

$\triangle=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\sin120°=18\sqrt{3}$，故選(2)．

2. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A=45°$，$\angle B=60°$，且外接圓半徑爲 2，試問 $\overline{BC}$ 的長爲



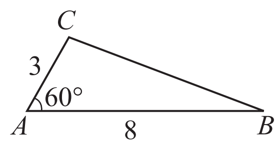
(1) 2　(2) $2\sqrt{2}$　(3) $2\sqrt{3}$　(4) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ ．

解：由正弦定理

$$\frac{\overline{BC}}{\sin45°}=\frac{\overline{AC}}{\sin60°}=\frac{\overline{AB}}{\sin75°}=2R=4,$$

$\overline{BC}=4\cdot\sin45°=2\sqrt{2}$，故選(2)．

3. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB}=8$，$\overline{AC}=3$，$\angle A=60°$，試問 $\overline{BC}$ 的長爲(1) 5 (2) 6　(3) 7　(4) 8．

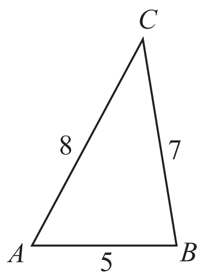


解：由餘弦定理

$$\overline{BC}^2=b^2+c^2-2bc\cos A=3^2+8^2-2\cdot3\cdot8\cdot\frac{1}{2}=49,$$

得 $\overline{BC}=7$，故選(3)．

4. 在 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=7$，$\overline{CA}=8$，試求：



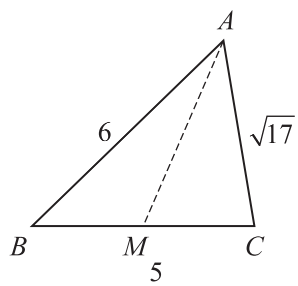
(1) $\triangle ABC$ 的面積．　(2) $\triangle ABC$ 的內切圓半徑．

解：因 $s=10$，

(1) $\triangle=\sqrt{10\cdot3\cdot2\cdot5}=10\sqrt{3}$ ．

(2) $\triangle=r\cdot s$，$10\sqrt{3}=r\cdot10$，得 $r=\sqrt{3}$ ．

5. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CA}=\sqrt{17}$，且 M 爲 $\overline{BC}$ 的中點，試求 $\overline{BC}$ 邊上中線 $\overline{AM}$ 的長．



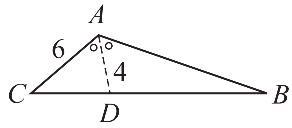
解：由平行四邊形定理

$(2\overline{AM})^2+\overline{BC}^2=2(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2)$，

$4\overline{AM}^2+25=2(36+17)$，

$4\overline{AM}^2=81$， $2\overline{AM}=9$， 得 $\overline{AM}=\dfrac{9}{2}$ ．

6. 在△ABC 中， $\angle A=120°$， $\overline{AC}=6$， $\angle A$ 的角平分線 $\overline{AD}=4$， 試求：



(1) $\overline{AB}$ 的長． (2) △ABC 的面積．

解：(1) △ABC =△ABD +△ACD，

$\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot\overline{AB}\cdot\sin 120°=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot\overline{AB}\cdot\sin 60°+\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\cdot\sin 60°$， $2\overline{AB}=24$， 得 $\overline{AB}=12$ ．

(2) △ABC 的面積 $=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\sin 120°=18\sqrt{3}$ ．

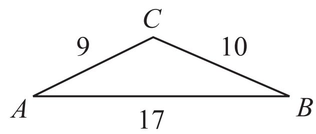
進階題

1. 在△ABC 中，若 $\overline{AB}=5$， $\overline{AC}=7$， M 為 $\overline{BC}$ 的中點且 $\overline{AM}=4$， 試求 $\overline{BC}$ 的長．

解：由平行四邊形定理 $(2\overline{AM})^2+\overline{BC}^2=2(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2)$，

$64+\overline{BC}^2=148$， $\overline{BC}^2=84$， 得 $\overline{BC}=2\sqrt{21}$ ．

2. 在△ABC 中， $\overline{AB}=17$， $\overline{BC}=10$， $\overline{CA}=9$， 試求：



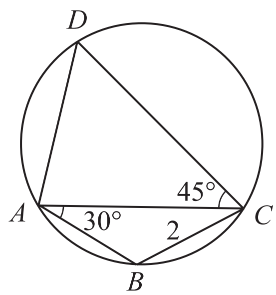
(1) △ABC 的面積． (2) △ABC 的外接圓半徑．

解：因 $s=18$，

(1) $\triangle=\sqrt{18\cdot 8\cdot 9\cdot 1}=36$ ．

(2) $R=\dfrac{abc}{4\cdot\triangle}=\dfrac{10\times 9\times 17}{4\times 36}=\dfrac{85}{8}$ ．

3. 設圓內接四邊形 $ABCD$ 中， $\angle BAC=30°$， $\angle ACD=45°$， $\overline{BC}=2$， 試求：(1)此圓的半徑． (2) $\overline{AD}$ 的長．

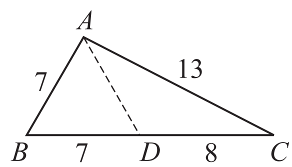


解：由正弦定理，

(1) △ABC 中， $\dfrac{2}{\sin 30°}=2R$， 得 $R=2$，

(2) △ACD 中， $\dfrac{\overline{AD}}{\sin 45°}=2R=4$， 得 $\overline{AD}=4\cdot\sin 45°=2\sqrt{2}$ ．

4. 在△ABC 中，若 D 點在 $\overline{BC}$ 邊上，且 $\overline{AB}=7$， $\overline{AC}=13$， $\overline{BD}=7$， $\overline{CD}=8$， 試求：(1) $\angle B$ ． (2) $\overline{AD}$ ．



解：由餘弦定理，

(1) $\cos B=\dfrac{7^2+15^2-13^2}{2\cdot 7\cdot 15}=\dfrac{1}{2}$， 得 $\angle B=60°$ ．

(2) $\overline{AD}^2=7^2+7^2-2\cdot 7\cdot 7\cdot\cos 60°=49$， 得 $\overline{AD}=7$ ．

5. 已知四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB}=8$， $\overline{CD}=8$， $\overline{AD}=3$， $\angle ABC=\angle ADC=60^\circ$， 且 $\overline{BC}>\overline{AD}$， 試求：(1) $\overline{AC}$ 的長．　(2) $\overline{BC}$ 的長．

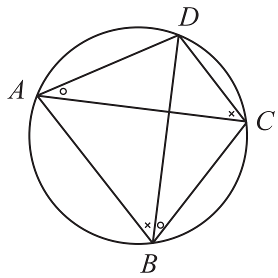
解： 由餘弦定理，

(1) $\overline{AC}^2=\overline{DA}^2+\overline{DC}^2-2\overline{DA}\cdot\overline{DC}\cdot\cos 60^\circ=9+64-2\cdot3\cdot8\cdot\frac{1}{2}=49$， 得 $\overline{AC}=7$．

(2)設 $\overline{BC}=x$， 得 $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\cos 60^\circ$，

得 $x^2-8x+15=0$， 得 $x=3$， 5，又 $\overline{BC}>\overline{AD}$， 故 $\overline{BC}=5$．

6. 已知 $ABCD$ 爲內接四邊形，若 $\angle DBC=30^\circ$， $\angle ABD=45^\circ$， $\overline{CD}=6$，試求：

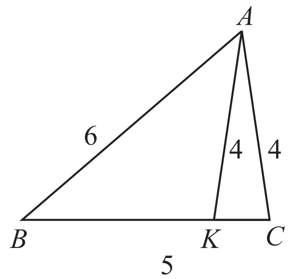


(1) $\angle DAC$， $\angle ACD$．　(2) $\overline{AD}$．

解： (1) $\angle DAC=\angle DBC=30^\circ$，　$\angle ACD=\angle ABD=45^\circ$．

(2)由正弦定理 $\dfrac{\overline{AD}}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\overline{CD}}{\sin 30^\circ}$，　得 $\overline{AD}=\dfrac{6}{\sin 30^\circ}\times\sin 45^\circ=6\sqrt{2}$．

7. 在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=6$， $\overline{AC}=4$， $\overline{BC}=5$， 且 $\overline{AK}=4$，試求：



(1) $\cos B$．　(2) $\overline{BK}$．

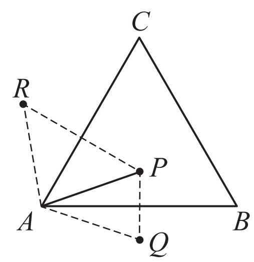
解： 由餘弦定理，

(1) $\cos B=\dfrac{6^2+5^2-4^2}{2\cdot6\cdot5}=\dfrac{3}{4}$．

(2)設 $\overline{BK}=x$， $\cos B=\dfrac{6^2+x^2-4^2}{2\cdot6\cdot x}$，

得 $x^2-9x+20=0$， 知 $x=4$（因 $\overline{BK}<\overline{BC}$）.

8. 正 $\triangle ABC$ 的內部有一點 P， 且 $\overline{AP}=5$， P 對 $\overline{AB}$， $\overline{AC}$ 的對稱點爲點 Q， R， 試求：



(1) $\angle QAR$．　(2) $\overline{QR}$．

解： (1) $\angle QAB=\angle PAB$， $\angle RAC=\angle PAC$， $\angle QAR=2\angle BAC=120^\circ$．

(2) $\overline{AQ}=\overline{AP}=5$， $\overline{AR}=\overline{AP}=5$，

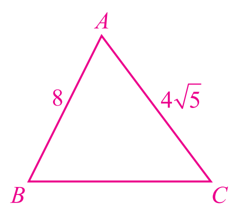
由餘弦定理 $\overline{QR}^2=5^2+5^2-2\cdot5\cdot5\cdot\cos120^\circ=75$， 故 $\overline{QR}=5\sqrt{3}$．

9. 若三角形 ABC 的 $\overline{AB}=8$， $\overline{AC}=4\sqrt{5}$ 及 $\cos\angle BAC=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$， 則 $\sin\angle ACB=$ $\underline{\ \dfrac{4}{5}\ }$．

解： 由餘弦定理知

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos\angle BAC$

$=64+80-2\cdot8\cdot4\sqrt{5}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{5}}=80$， 得 $\overline{BC}=4\sqrt{5}$，



由正弦定理知

$\dfrac{\overline{AB}}{\sin\angle ACB}=\dfrac{4\sqrt{5}}{\sin\angle BAC}$，而 $\sin\angle BAC=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，得 $\sin\angle ACB=\dfrac{4}{5}$.

情境模擬題

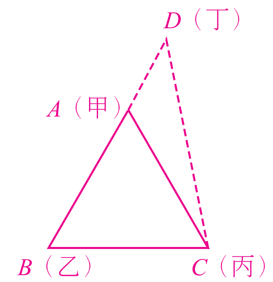
1. 假設甲、乙、丙三鎮兩兩之間的距離皆爲 20 公里，兩條筆直的公路交於丁鎮，其中之一通過甲、乙兩鎮而另一通過丙鎮，今在一比例精準的地圖上量得兩公路的夾角爲 45°，則丙、丁兩鎮間的距離約爲

(1) 24.5 公里 (2) 25 公里 (3) 25.5 公里 (4) 26 公里 (5) 26.5 公里．

解： 在 $\triangle ACD$ 中，$\angle DAC=120°$，$\angle D=45°$，$\angle DCA=15°$，

由正弦定理知 $\dfrac{\overline{CD}}{\sin 120°}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin 45°}=20\sqrt{2}$，

$\overline{CD}=20\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{6}\approx 24.5$（公里）.



2. 平面上有 A，B，C 三點．已知 B，C 之間的距離是 200 公尺，B，A 之間的距離是 1500 公尺，$\angle ACB=60°$．請問 A，C 之間距離的最佳近似值爲

(1) 1500 公尺 (2) 1600 公尺 (3) 1700 公尺 (4) 1800 公尺．

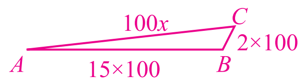
解： 設 $\overline{AC}=100x$ 公尺，由餘弦定理知

$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cdot\cos 60°$，

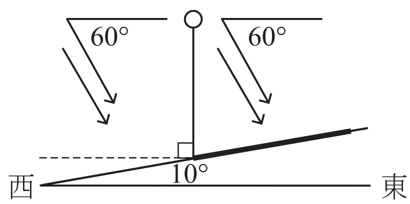
整理得 $x(x-2)=221$，

因 $15\times 13=195$，$16\times 14=224$，$17\times 15=255$，$18\times 16=288$，知 $x\approx 16$；

即 $\overline{AC}\approx 1600$（公尺）.



3. 在與水平面成 10° 的東西向山坡上，鉛直（即與水平面垂直）立起一根旗竿．當陽光從正西方以俯角 60° 平行投射在山坡上時，旗竿的影子長爲 11 公尺，如右圖所示（其中箭頭表示陽光投射的方向，而粗黑線段表示旗竿的影子）．試問旗竿的長度最接近以下哪一選項？



(1) 19.1 公尺 (2) 19.8 公尺 (3) 20.7 公尺 (4) 21.1 公尺 (5) 21.7 公尺．

參考數值：

$\sin 10°\approx 0.174$，$\sin 20°\approx 0.342$，$\cos 10°\approx 0.985$，$\cos 20°\approx 0.940$，$\sqrt{3}\approx 1.732$.

解： 依題意，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=11$，$\angle B=70°$，$\angle C=30°$，

由正弦定理 $\dfrac{\overline{AB}}{\sin 30°}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin 70°}$，即 $\dfrac{11}{\sin 30°}=\dfrac{\overline{AC}}{\cos 20°}$，

$\dfrac{1}{2}\overline{AC}=11\cdot\cos 20°=10.34$，

知 $\overline{AC}=20.68\approx 20.7$（公尺）.