1-2 廣義角與極坐標

基礎題

1. 試問 $\tan 45^\circ+\tan 135^\circ+\tan 225^\circ+\tan 315^\circ$ 的和爲
(1) -2 (2) -1 (3) 0 (4) 4 .

解： $\tan 45^\circ=1$， $\tan 135^\circ=\tan(180^\circ-45^\circ)=-\tan 45^\circ=-1$,
$\tan 225^\circ=\tan(180^\circ+45^\circ)=\tan 45^\circ=1$,
$\tan 315^\circ=\tan(360^\circ-45^\circ)=-\tan 45^\circ=-1$,
得原式 $=1+(-1)+1+(-1)=0$.

2. 設 $A=\sin 1230^\circ$， $B=\cos(-1140^\circ)$， $C=\tan 1665^\circ$， $D=\cos 2250^\circ$， 試問最大的值是
(1) A (2) B (3) C (4) D .

解： $A=\sin(150^\circ+360^\circ\times 3)=\sin 150^\circ=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$,
$B=\cos(-60^\circ-360^\circ\times 3)=\cos(-60^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$,
$C=\tan(225^\circ+360^\circ\times 4)=\tan 225^\circ=\tan 45^\circ=1$,
$D=\cos(90^\circ+360^\circ\times 6)=\cos 90^\circ=0$,

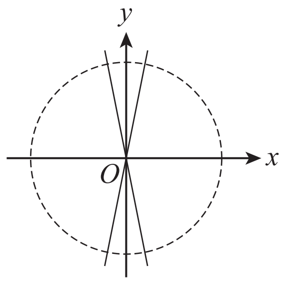
3. 在 $\triangle ABC$ 中， 下列哪些選項的條件有可能成立？
(1) $\sin A=\sin B=\sin C=\frac{1}{2}$ (2) $\cos A=\cos B=\cos C=\frac{1}{2}$
(3) $\tan A=\tan B=\tan C=1$ (4) $\sin A=\cos A=\tan A$.

解： (1) $\sin\theta=\frac{1}{2}$ 時， $\theta=30^\circ$ 或 150°， $\angle A+\angle B+\angle C\neq 180^\circ$.
(2) $\cos\theta=\frac{1}{2}$ 時， $\theta=60^\circ$， $\angle A=\angle B=\angle C=60^\circ$， $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$.
(3) $\tan\theta=1$ 時， $\theta=45^\circ$， $\angle A+\angle B+\angle C=135^\circ$.
(4) $\sin A=\cos A$ 時， $\angle A=45^\circ$， $\tan A=1$， $\cos A\neq\tan A$,

4. 設 $\sin\theta=\frac{3}{5}$ 且 $90^\circ<\theta<180^\circ$， 試問 $\tan\theta$ 的值 .

解： 因 $\sin\theta=\frac{3}{5}$ 且 $90^\circ<\theta<180^\circ$， 知 $\cos\theta<0$,
$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=\frac{16}{25}$， 得 $\cos\theta=-\frac{4}{5}$,
知 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{3}{4}$.

5. 設 θ_1，θ_2，θ_3，θ_4 分別爲第一，二，三，四象限角，且都介於 $0°$ 與 $360°$ 之間，已知 $|\cos\theta_1|=|\cos\theta_2|=|\cos\theta_3|=|\cos\theta_4|=\dfrac{1}{5}$，試問 $\theta_3+\theta_4$ 的值．



解： θ_1 是第一象限角，

$\theta_2=180°-\theta_1$，$\theta_3=180°+\theta_1$，$\theta_4=360°-\theta_1$，

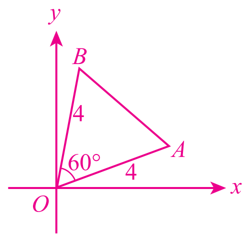
知 $\theta_3+\theta_4=(180°+\theta_1)+(360°-\theta_1)=540°$．

6. 設極坐標平面上，$A[4,20°]$，$B[4,80°]$，試求 $\overline{AB}$ 的長．

解： $\overline{OA}=\overline{OB}=4$ 且 $\angle AOB=60°$，

知 $\triangle OAB$ 是正三角形，

得 $\overline{AB}=4$．



進階題

1. 已知對任意角 θ，換角公式均成立，設 $\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$，試求：

(1) $\sin(180°-\theta)$．　(2) $\sin(\theta-180°)$．

解： (1) $\sin(180°-\theta)=\sin\theta=-\dfrac{3}{5}$．

(2) $\sin(\theta-180°)=-\sin(180°-\theta)=-\sin\theta=\dfrac{3}{5}$．

2. 設 θ 是一銳角，已知 θ 有一個同界角的度數恰爲 6θ，試問 θ 值．

解： 由同界角的關係：

$6\theta=\theta+360°\cdot k$，$k$ 爲整數，

$5\theta=360°\cdot k$，知 $\theta=72°\cdot k$，

因 θ 是銳角，取 $k=1$，$\theta=72°$．

3. 試求 $\dfrac{\sin(-\theta)}{\sin(180°-\theta)}+\dfrac{\cos(\theta+180°)}{\cos(\theta-180°)}+\dfrac{\tan(\theta-360°)}{\tan(-\theta)}$ 的值．

解： $\sin(-\theta)=-\sin\theta$，$\sin(180°-\theta)=\sin\theta$，

$\cos(\theta+180°)=-\cos\theta$，$\cos(\theta-180°)=\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$，

$\tan(\theta-360°)=-\tan(360°-\theta)=\tan\theta$，$\tan(-\theta)=-\tan\theta$，

原式 $=\dfrac{-\sin\theta}{\sin\theta}+\dfrac{-\cos\theta}{-\cos\theta}+\dfrac{\tan\theta}{-\tan\theta}=-1+1-1=-1$．

4. 試求 $\cos 20°+\cos 40°+\cos 60°+\cos 80°+\cos 100°+\cos 120°+\cos 140°+\cos 160°$ $+\cos 180°$ 的值．

解： $\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$，

即 $\cos 100°=-\cos 80°$， $\cos 120°=-\cos 60°$，

$\cos 140°=-\cos 40°$， $\cos 160°=-\cos 20°$，

原式 $=(\cos 20°+\cos 160°)+(\cos 40°+\cos 140°)+(\cos 60°+\cos 120°)+(\cos 80°+\cos 100°)+\cos 180°$

$=\cos 180°=-1$．

5. 已知點 A， B 的極坐標，試求其直角坐標：

(1) $A[5, 90°]$． (2) $B[4, 120°]$．

解：(1) $r=5$， $\theta=90°$， 設 A 的直角坐標 $A(x, y)$，

$x=5\cos 90°=0$， $y=5\sin 90°=5$， 知 $A(0, 5)$．

(2) $r=4$， $\theta=120°$， 設 B 的直角坐標 $B(x, y)$，

$x=4\cos 120°=-2$， $y=4\sin 120°=2\sqrt{3}$， 知 $B(-2, 2\sqrt{3})$．

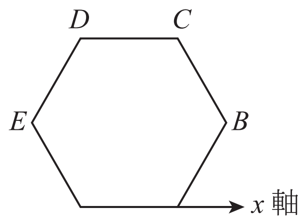
6. 已知點 P， Q 的直角坐標，試求其極坐標 $[r, \theta]$，限制 $0\le\theta<2\pi$：

(1) $P(0, -7)$． (2) $Q(-5, 5)$．

解：(1) $r=\overline{OP}=7$， 且 $\theta=270°$， 得 P 的極坐標是 $P[7, 270°]$．

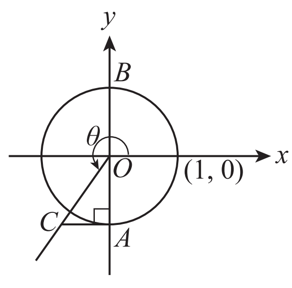
(2) $r=\overline{OQ}=5\sqrt{2}$， 且 $\theta=135°$， 得 Q 的極坐標是 $Q[5\sqrt{2}, 135°]$．

7. 右圖是邊長爲 1 的正六邊形 $OABCDE$， 已知 O 是原點，試問點 C 的極坐標．



解：因 $\overline{OC}=2$， 且 $\angle COA=60°$， 得點 C 的極坐標爲 $[2, 60°]$．

8. 右圖中，單位圓 O 與 y 軸相交於 A， B 兩點，已知 $\overline{OA}=1$，角 θ 的終邊上有一點 C， $\overline{CA}\perp\overline{OA}$ 且 $\tan\theta=\dfrac{5}{3}$， 試問 $\overline{AC}$ 的長．



解：設 C 的坐標爲 $(k, -1)$， 知 $\overline{AC}=|k|$，

$\tan\theta=\dfrac{-1}{k}=\dfrac{5}{3}$， 得 $k=-\dfrac{3}{5}$， 知 $\overline{AC}=\dfrac{3}{5}$．

9. 設 $\cos 50°=k$， 試用 k 表示 $\tan 230°$．

解： 因 $\cos 50°=k$， 由 $\sin^2 50°=1-\cos^2 50°=1-k^2$， 得 $\sin 50°=\sqrt{1-k^2}$，

$\tan 230°=\tan(180°+50°)=\tan 50°$，

$\tan 50°=\dfrac{\sin 50°}{\cos 50°}=\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k}$．

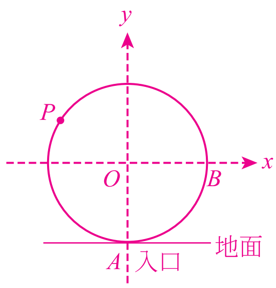
情境模擬題

1. 一個時鐘從上午 9 時整走到上午 10 時 20 分，時鐘的分針旋轉的有向角是幾度？

解：分針每分鐘旋轉 $-6°$，知 80 分鐘所旋轉的有向角爲 $(-6°)\times 80=-480°$.

2. 有一摩天輪直徑爲 60 公尺，已知摩天輪是等速順時針旋轉，且旋轉一圈的時間是 24 分鐘，現在大明從地面入口搭上摩天輪，試問 8 分鐘後大明離地面的高度 .

解：每分鐘旋轉的角度是 $360°\div 24=15°$，
8 分鐘時旋轉 $15°\times 8=120°$， $\angle POA=120°$，
在坐標平面上知 8 分鐘後大明的位置 $P(x, y)$，
因 $\overline{OP}=30$， $\angle POB=150°$， $y=30\cdot\sin 150°=15$，
知離地面的高度 $h=y+\overline{OA}=15+30=45$（公尺）.



3. 沙漠旅行中，有一駱駝客告訴沙漠旅行者說：離此最近的兩綠洲，一是在面對太陽向右轉 $50°$，前進 5 公里處；一是在面對太陽向左轉 $40°$，前進 12 公里處，試問兩綠洲的距離 .

解：設 O 是旅行者所在位置，太陽在正東方的位置，
在極坐標中 $A[5,-50°]$， $B[12, 40°]$，
因 $\overline{OA}=5$， $\overline{OB}=12$， $\angle AOB=90°$，
知 $\triangle AOB$ 是直角三角形，得 $\overline{AB}=13$（公里）.